Fondements de la théorie des probabilités

Espaces de probabilité

Cours de Probabilités — Licence 3

Plan du chapitre

Espace de probabilité

Rappels de théorie de la mesure

Synthèse

Espace de probabilité

Définition

Définition

Un **espace de probabilité** $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un ensemble Ω muni d'une tribu $\mathcal{A}$ sur laquelle est définie une mesure de probabilité $\mathbb{P}$, c'est-à-dire une mesure telle que

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

- Ω : ensemble de toutes les éventualités possibles de l'expérience aléatoire ;
- les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés événements : ce sont les parties de Ω auxquelles on peut attribuer une probabilité ;
- contrairement au cas discret, on ne peut pas toujours attribuer une probabilité à *n'importe quelle* partie de Ω.

Exemple : lancer d'un dé équilibré

Exemple

On veut modéliser un lancer de dé à 6 faces équilibré.

Une première modélisation :

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}, \qquad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega), \qquad \mathbb{P} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} \delta_k.$$

On peut toujours grossir Ω en ajoutant des réalisations impossibles :

- $\Omega = \{1, \dots, 7\}$, même $\mathcal{A}, \mathbb{P}$: l'issue 7 existe mais $\mathbb{P}(\{7\}) = 0$;
- $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ une tribu contenant $\{1, \dots, 6\}$, même $\mathbb{P}$.

À retenir

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ n'est pas unique : plusieurs modélisations décrivent la même expérience.

Exemple : tirage uniforme dans $[0,1]$

Exemple

On tire aléatoirement un nombre dans $[0,1]$ de manière uniforme.

Modélisation :

$$\big([0,1],\ \mathcal{B}([0,1]),\ \lambda\big),$$

où $\mathcal{B}([0,1])$ est la tribu borélienne sur $[0,1]$ et λ la mesure de Lebesgue.

Chaque issue est négligeable

$$\lambda(\{a\}) = 0 \quad \text{pour tout } a \in [0,1].$$

Un intervalle a une masse positive

$$\lambda\Big(\big[0, \tfrac{1}{3}\big]\Big) = \frac{1}{3}.$$

Le paradoxe de Bertrand (1889)

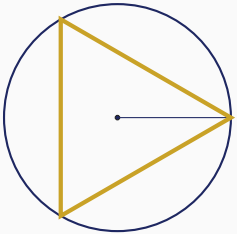
Exemple (Paradoxe de Bertrand)

Quelle est la probabilité qu'une corde tirée au hasard sur un cercle de rayon 1 soit plus longue que $\sqrt{3}$ (longueur du côté d'un triangle équilatéral inscrit) ?

Bertrand propose trois façons de tirer la corde au hasard :

1. les deux extrémités uniformément sur le cercle ;
2. le centre de la corde uniformément sur le disque ;
3. une direction uniforme, puis le centre uniformément sur le rayon associé.

Le paradoxe de Bertrand : trois réponses



Méthode (i)

$1/3$

Méthode (ii)

$1/4$

Méthode (iii)

$1/2$

Où est le paradoxe ?

Il n'y en a pas vraiment : chaque méthode définit un espace de probabilité *différent*. « Tirer une corde au hasard » n'a de sens que lorsqu'on précise ce triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Événements presque sûrs

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $A \in \mathcal{A}$. On dit que A a lieu **presque sûrement** (**p.s.**) si

$$\mathbb{P}(A) = 1,$$

c'est-à-dire si A a lieu $\mathbb{P}$-presque partout.

Exemple

Un nombre tiré uniformément dans $[0, 1]$ est presque sûrement irrationnel :

$$\lambda\big([0,1] \setminus \mathbb{Q}\big) = 1.$$

Tirer un rationnel reste *possible* dans le modèle, mais cela survient avec probabilité nulle.

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $A, B \in \mathcal{A}$ avec $\mathbb{P}(B) > 0$. La **probabilité conditionnelle de A sachant B** est

$$\mathbb{P}(A \mid B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

- Ne se définit que lorsque $\mathbb{P}(B) > 0$;
- mesure la probabilité de A une fois que l'on sait que B est réalisé ;
- sera au cœur des notions d'indépendance vues dans les chapitres suivants.

Rappels de théorie de la mesure

Propriétés de base de $\mathbb{P}$

Proposition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $A, B \in \mathcal{A}$ et $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

1. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
3. $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
5. $\mathbb{P}\big(\bigcup_n A_n\big) \leq \sum_n \mathbb{P}(A_n)$
6. A_n disjoints $\Rightarrow \mathbb{P}\big(\bigsqcup_n A_n\big) = \sum_n \mathbb{P}(A_n)$

Propriétés de base de $\mathbb{P}$

Continuité monotone

- Suite *croissante* : $\mathbb{P}\big(\bigcup_n \uparrow A_n\big) = \lim_n \uparrow \mathbb{P}(A_n)$
- Suite *décroissante* : $\mathbb{P}\big(\bigcap_n \downarrow A_n\big) = \lim_n \downarrow \mathbb{P}(A_n)$
  (toujours vraie ici car $\mathbb{P}$ est une mesure *finie*)

Théorème d'unicité de mesure

Théorème (Unicité de mesure)

Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et P, Q deux mesures de probabilité sur E. S'il existe $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$, stable par intersections finies, telle que

$$\forall\, C \in \mathcal{C}, \quad P(C) = Q(C),$$

alors P et Q coïncident sur la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

Idée à retenir

Il suffit de vérifier l'égalité de deux mesures sur une famille stable par intersection qui engendre la tribu, pas sur tous les événements.

Théorème d'unicité de mesure sur $\mathbb{R}^d$

Théorème (Unicité de mesure — version 2)

Soit $d \geq 1$ et P, Q deux mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $P = Q$;
2. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}P = \int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}Q$ pour toute $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ mesurable ;
3. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}P = \int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}Q$ pour toute $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue bornée ;
4. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}P = \int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}Q$ pour toute $f \in \mathcal{C}^\infty$ à support compact.

Une fonction est à support compact s'il existe un compact en dehors duquel elle s'annule.

Synthèse

Ce qu'il faut retenir

- Un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ n'est jamais unique pour une même expérience aléatoire.
- Un événement de probabilité 1 n'est pas forcément *certain* : il est presque sûr.
- Le paradoxe de Bertrand illustre l'importance de bien préciser l'espace de probabilité choisi.
- Les théorèmes d'unicité permettent de vérifier l'égalité de deux mesures sur une famille génératrice plutôt que sur toute la tribu.

Prochain chapitre : variables aléatoires