

Vecteurs aléatoires et indépendance

Rappels de théorie de la mesure — Loi jointe et marginales

Cours de Probabilités — Licence 3

Plan du chapitre

Rappels de théorie de la mesure

Tribus produit

Mesures produit

Changement de variable

Vecteurs aléatoires, loi jointe et marginale

Loi jointe, lois marginales

Lois continues sur $\mathbb{R}^d$

Covariance

Synthèse

Rappels de théorie de la mesure

Définition

Soit $(E_1, \mathcal{E}_1), \dots, (E_d, \mathcal{E}_d)$ des espaces mesurables. On munit $E_1 \times \dots \times E_d$ de la **tribu produit**

$$\mathcal{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_d := \sigma(\{B_1 \times \dots \times B_d : B_i \in \mathcal{E}_i\}).$$

- C'est la plus petite tribu rendant **mesurables** toutes les projections $\pi_i : (x_1, \dots, x_d) \mapsto x_i$;
- par défaut, $\mathbb{R}^d$ est toujours muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d}.$$

De plus, cette tribu est engendrée par

$$\left\{] - \infty, a_1] \times \cdots \times] - \infty, a_d] : a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Corollaire (unicité sur $\mathbb{R}^d$)

Si P, Q sont deux lois sur $\mathbb{R}^d$ telles que $P(] - \infty, a_1] \times \cdots \times] - \infty, a_d]) = Q(\dots)$ pour tous $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}$, alors $P = Q$.

Conséquence directe du théorème d'unicité de mesure : cette famille est stable par intersections finies.

Théorème

Soit $(E_1, \mathcal{E}_1, \mu_1), \dots, (E_d, \mathcal{E}_d, \mu_d)$ des espaces mesurés, μ_i σ -finies. Il existe une **unique** mesure $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_d$ sur $E_1 \times \dots \times E_d$, la **mesure produit**, telle que

$$\forall B_i \in \mathcal{E}_i, \quad (\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_d)(B_1 \times \dots \times B_d) = \mu_1(B_1) \dots \mu_d(B_d).$$

Sur $\mathbb{R}^d$: $\lambda_d = \lambda_1^{\otimes d}$ (la mesure de Lebesgue est un produit de mesures de Lebesgue).

Théorème (Fubini–Tonelli)

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$, $(F, \mathcal{F}, \nu)$ des espaces mesurés σ -finis, et $f: E \times F \rightarrow [0, \infty]$ mesurable. Alors $x \mapsto \int_F f(x, y) \, d\nu(y)$ et $y \mapsto \int_E f(x, y) \, d\mu(x)$ sont mesurables, et

$$\int_{E \times F} f \, d(\mu \otimes \nu) = \int_E \left(\int_F f(x, y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_F \left(\int_E f(x, y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Valable sans hypothèse d'intégrabilité, car $f \geq 0$.

Théorème de Fubini–Lebesgue

Théorème (Fubini–Lebesgue)

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$, $(F, \mathcal{F}, \nu)$ σ -finis, et $f: E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, **intégrable** pour $\mu \otimes \nu$. Alors les fonctions

$$x \mapsto \int_F f(x, y) \, d\nu(y) \quad \text{et} \quad y \mapsto \int_E f(x, y) \, d\mu(x)$$

sont bien définies p.p., mesurables, intégrables, et l'égalité de Fubini–Tonelli reste vraie.

En pratique

On applique **Tonelli** pour vérifier l'intégrabilité (avec $|f|$), puis **Lebesgue** pour intervertir les intégrales.

Soit U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d): U \rightarrow V$.

Définition

φ est un **$\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme** si φ est bijective, $\mathcal{C}^1$ sur U , et φ^{-1} est $\mathcal{C}^1$ sur V .

La matrice jacobienne $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq d}$ est alors inversible en tout $x \in U$. On note $\text{Jac}_\varphi(x)$ son déterminant : le **Jacobien** de φ en x .

Critère pratique (inversion locale) : φ bijective, $\mathcal{C}^1$, et $\text{Jac}_\varphi \neq 0$ partout sur U — on peut vérifier ces propriétés sur φ^{-1} si c'est plus simple, avec $\text{Jac}_\varphi(x) = [\text{Jac}_{\varphi^{-1}}(\varphi(x))]^{-1}$.

Théorème

Soit U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $\varphi: U \rightarrow V$ un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme. Pour toute $f: V \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable,

$$\int_V f(y) \, dy = \int_U f(\varphi(x)) |\text{Jac}_\varphi(x)| \, dx.$$

Outil essentiel pour calculer la loi d'un vecteur aléatoire continu transformé par φ .

Vecteurs aléatoires, loi jointe et marginale

Vecteur aléatoire = d v.a. réelles

Si X est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (muni de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$), notons $(X_1, \dots, X_d)$ ses coordonnées : les X_i sont des v.a. réelles.

Réciproquement, si $X_1, \dots, X_d$ sont des v.a. réelles, alors $X = (X_1, \dots, X_d)$ est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Équivalence

Considérer un **vecteur** de d v.a. réelles ou une **seule** v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, c'est la même chose.

Définition

Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

- Les lois P_{X_i} , $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, sont les **lois marginales** de X ;
 - la loi P_X est la **loi jointe** de $(X_1, \dots, X_d)$.
-
- La loi jointe n'est *rien d'autre* que la loi de $(X_1, \dots, X_d)$; le mot “jointe” souligne qu'on regarde le **vecteur** plutôt que les coordonnées séparément ;
 - la loi jointe **détermine** les lois marginales, mais **pas l'inverse** !

Proposition

Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\pi_i: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ la projection sur la i -ème coordonnée. Alors P_{X_i} est la mesure image de P_X par π_i .

Preuve.

Exemple : la réciproque est fausse

Exemple

Soit $X = (X_1, X_2)$ de loi $P_X = \frac{1}{4}\delta_{(0,0)} + \frac{1}{4}\delta_{(0,1)} + \frac{1}{4}\delta_{(1,0)} + \frac{1}{4}\delta_{(1,1)}$.

On calcule $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \mathbb{P}(X \in \{(0,0), (0,1)\}) = \frac{1}{2}$, donc $X_1 \sim \mathcal{B}(1/2)$; de même $X_2 \sim \mathcal{B}(1/2)$.

Exemple

Soit $Y = (Y_1, Y_2)$ de loi $P_Y = \frac{1}{2}\delta_{(0,0)} + \frac{1}{2}\delta_{(1,1)}$.

De même, $Y_1, Y_2 \sim \mathcal{B}(1/2)$.

Même marginales, lois jointes différentes

X et Y ont les **mêmes** lois marginales, mais $P_X \neq P_Y$: ici X_1, X_2 sont indépendantes, alors que $Y_1 = Y_2$ p.s.

Définition

Une loi sur $\mathbb{R}^d$ est **continue** si elle est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est **continue** si sa loi l'est, de densité notée $p_X: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$.

On note $dP_X(x) = p_X(x) dx$, où $x = (x_1, \dots, x_d)$.

“ X est continue de densité p_X ” $\iff$ “ X est de loi $p_X(x) dx$ ”.

Proposition

Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ une v.a. continue à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Alors ses lois marginales sont **continues**. Précisément, X_i a pour densité

$$p_{X_i}(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} p_X(x_1, \dots, x_d) \, dx_1 \cdots dx_{i-1} \, dx_{i+1} \cdots dx_d.$$

Cas $d = 2$:

$$p_{X_1}(x_1) = \int_{\mathbb{R}} p_X(x_1, x_2) \, dx_2 \quad \text{et} \quad p_{X_2}(x_2) = \int_{\mathbb{R}} p_X(x_1, x_2) \, dx_1.$$

Pour $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable, en notant π_i la projection, $X_i = \pi_i(X)$. Par le **théorème de transfert** :

$$\mathbb{E}[f(X_i)] = \int_{\mathbb{R}^d} f(x_i) p_X(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_d.$$

Par **Fubini–Tonelli**, on intègre d'abord par rapport à toutes les variables sauf x_i :

$$\mathbb{E}[f(X_i)] = \int_{\mathbb{R}} f(x_i) \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} p_X(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_d \right) dx_i.$$

La quantité entre parenthèses, vue comme fonction de x_i , est la densité p_{X_i} .

Exemple : point uniforme dans un triangle

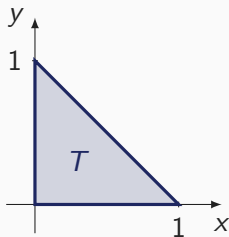
Exemple

Soit $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Comme $\lambda_2(T) = 1/2$, la loi uniforme sur T est $2 \mathbf{1}_T(x, y) dx dy$. Soit (X, Y) de densité $2 \mathbf{1}_T$.

Exemple : point uniforme dans un triangle

Exemple

Soit $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Comme $\lambda_2(T) = 1/2$, la loi uniforme sur T est $2 \mathbf{1}_T(x, y) dx dy$. Soit (X, Y) de densité $2 \mathbf{1}_T$.



Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$p_X(x) = \int_{\mathbb{R}} 2 \mathbf{1}_T(x, y) dy$$

donne, pour $x \in [0, 1]$, $\int_0^{1-x} 2 dy = 2(1 - x)$.

X a densité $2(1 - x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$; par symétrie, Y a la même loi.

Méthode

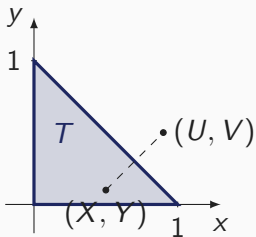
Pour trouver la loi de X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, on exprime $\mathbb{E}[f(X)]$, pour $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable quelconque, sous la forme $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu(x)$: alors $P_X = \mu$.

Si X est définie à partir d'une autre v.a. continue, cela demande généralement un changement de variable en dimension d .

Exemple : symétrique par rapport à l'hypoténuse

Exemple

Avec (X, Y) comme précédemment, soit (U, V) le symétrique de (X, Y) par rapport à l'hypoténuse de T : $(U, V) = (1 - Y, 1 - X)$.



On pose $\varphi(u, v) = (1 - v, 1 - u)$, bijective (involutive), $\mathcal{C}^1$, de Jacobien

$$\text{Jac}_\varphi(u, v) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Donc φ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Pour $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable, en substituant $(x, y) = \varphi(u, v)$ dans $\mathbb{E}[f(U, V)] = \mathbb{E}[f(1 - Y, 1 - X)]$:

$$\mathbb{E}[f(U, V)] = \int_{\mathbb{R}^2} f(u, v) \cdot 2 \mathbf{1}_{v \leq 1, u \leq 1, u+v \geq 1} \, du \, dv.$$

(U, V) suit la loi uniforme sur le symétrique de T par rapport à son hypoténuse.

Définition

Soit $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ des v.a. réelles. La **covariance** de X et Y est

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])].$$

Elle quantifie à quel point X et Y prennent leurs valeurs **au-dessus de leur moyenne** en même temps.

Proposition (formule de König–Huygens)

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

Par Cauchy–Schwarz :

$$|\text{Cov}(X, Y)| \leq \mathbb{E} [(X - \mathbb{E}[X])^2]^{1/2} \mathbb{E} [(Y - \mathbb{E}[Y])^2]^{1/2} = \sigma_X \sigma_Y.$$

Cas d'égalité

- Si $\text{Cov}(X, Y) = \sigma_X \sigma_Y$: alors $Y = cX + a$ p.s. avec $c \geq 0$, ou $X = a$ p.s. (pour un $a \in \mathbb{R}$) ;
- si $\text{Cov}(X, Y) = -\sigma_X \sigma_Y$: alors $Y = -cX + a$ p.s. avec $c \geq 0$, ou $X = a$ p.s.

Attention

Si X, Y sont indépendantes, $\text{Cov}(X, Y) = 0$ (on le verra bientôt) — mais la réciproque est fausse !

Synthèse

Ce qu'il faut retenir

- Sur $\mathbb{R}^d$, la tribu **produit** coïncide avec la tribu borélienne ; l'unicité des lois s'y vérifie sur les pavés $] -\infty, a_1] \times \dots$.
- Les théorèmes de **Fubini** (Tonelli pour l'intégrabilité, Lebesgue pour intervertir) sont les outils clés en dimension $d \geq 2$.
- La formule de **changement de variable** avec Jacobien est essentielle pour les vecteurs continus.
- Un vecteur aléatoire = d v.a. réelles ; sa **loi jointe** détermine les lois marginales, mais pas l'inverse.
- La **covariance** mesure une dépendance linéaire ; nulle sous indépendance, mais pas réciproquement.

Prochain chapitre : indépendance de variables aléatoires