

TD 1 – Rappels de théorie de la mesure et de probabilités discrètes

1. Théorie de la mesure

Définition :

- ▷ Un *espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un ensemble Ω muni d'une tribu $\mathcal{A}$ sur laquelle est définie une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ (c'est-à-dire une mesure telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$).
- ▷ Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Une *variable aléatoire* à valeurs dans E est une fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(E, \mathcal{E})$.

Exercice 1. (Mesure image) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et X une variable aléatoire à valeurs dans E . Pour $B \in \mathcal{E}$, on pose $\mu(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$. Montrer que μ est une mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{E})$. On l'appelle la *mesure image de $\mathbb{P}$ par X* .

Exercice 2. (Fonction de répartition) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ (muni des boréliens). Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}).$$

1. Montrer que F est croissante.
2. Montrer que F est continue à droite.
3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.

Corrigé.

1. Si $x \leq y$, alors $\{X \leq x\} \subset \{X \leq y\}$ et donc $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \leq \mathbb{P}(X \leq y) = F(y)$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $(y_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante convergeant vers x , on a

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 0} \{X \leq y_n\}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X \leq y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n),$$

car la suite d'événements $\{X \leq y_n\}$ est décroissante. Ainsi F est continue à droite.

Remarque. On utilise ici l'implication suivante : si pour toute suite $(y_n)_{n \geq 0}$ décroissante convergeant vers x , $F(y_n) \rightarrow F(x)$, alors

$$F(y) \xrightarrow[y > x]{y \rightarrow x} F(x). \quad (1)$$

Cela se montre par contraposée. Supposons que la convergence (1) est fausse. Cela signifie :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists y \in]x, x + \delta[, |F(x) - F(y)| > \varepsilon.$$

On fixe un tel $\varepsilon > 0$. On construit par récurrence une suite $(y_n)_{n \geq 0}$ décroissante telle que $y_n \rightarrow x$ et $|F(x) - F(y_n)| > \varepsilon$ pour tout $n \geq 0$. On initie en considérant $\delta = 1$: il existe alors $y_0 \in]x, x + 1]$ telle que $|F(x) - F(y_0)| > \varepsilon$. Supposons que y_n est définie, on considère alors $\delta = \min(n^{-1}, y_n - x) > 0$: on en déduit qu'il existe $y_{n+1} \in]x, x + \delta]$ tel que $|F(x) - F(y_{n+1})| > \varepsilon$ et on a à la fois $y_{n+1} \leq y_n$ et $x < y_{n+1} \leq x + n^{-1}$. Ainsi la suite construite est bien décroissante et converge vers x . On a donc montré : il existe une suite $(y_n)_{n \geq 0}$ décroissante convergeant vers x telle que $F(y_n)$ ne converge pas vers $F(x)$. On a donc montré la contraposée du résultat désiré.

3. Soit $(y_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante tendant vers $-\infty$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X \leq y_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 0} \{X \leq y_n\}\right) = \mathbb{P}\left(X \in \bigcap_{n \geq 0}]-\infty, y_n]\right) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0,$$

en utilisant de nouveau la continuité décroissante de $\mathbb{P}$. D'autre part, si $(y_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante tendant vers ∞ , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X \leq y_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 0} \{X \leq y_n\}\right) = \mathbb{P}(X < \infty) = 1,$$

en utilisant que la suite d'événements $\{X \leq y_n\}$ est croissante.

Exercice 3. (Limites supérieures et inférieures d'ensembles) On considère un ensemble Ω et $(A_n)_{n \geq 1}$, $(B_n)_{n \geq 1}$ des suites de sous-ensembles de Ω .

1. Décrire avec des mots les ensembles suivants

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k.$$

2. Montrer que les propriétés suivantes sont vérifiées.

- (a) $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$.
- (b) $(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n)^c = \liminf_{n \rightarrow \infty} (A_n)^c$
- (c) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \cup \limsup_{n \rightarrow \infty} B_n$.

3. Calculer $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ dans les cas suivants.

- (a) $A_{2n} = B$ et $A_{2n+1} = C$, où $B, C \subset \Omega$ sont fixés.
- (b) $A_{2n} =]0, 3 + 1/(2n)[$ et $A_{2n+1} =]-1 - 1/(3n), 2]$.

4. Supposons à présent que $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité et que $(A_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$. Montrer que les propriétés suivantes sont vérifiées.

- (a) $\mathbb{P}(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$.
- (b) $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Rappel. Pour $(a_n)_{n \geq 0} \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$, on définit $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k$.

Corrigé.

1. L'ensemble $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à tous les A_n à partir d'un certain rang, ou, en d'autres mots, l'ensemble $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à tous les A_n à l'exception d'un nombre fini d'entre eux.

L'ensemble $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à une infinité de A_n .

- 2.(a) Soit $x \in \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$. Alors x appartient à tous les A_n , sauf un nombre fini d'entre eux. En particulier, x appartient à une infinité de A_n et donc $x \in \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$. Cela montre l'inclusion.

- (b) On procède par égalité directe en utilisant la définition ensembliste :

$$(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n)^c = \left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k \right)^c = \bigcup_{n \geq 1} \left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right)^c = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} (A_k)^c = \liminf_{n \rightarrow \infty} (A_n)^c.$$

- (c) Cette égalité provient du fait qu'un élément appartient à une infinité de $A_n \cup B_n$ si et seulement si il appartient à une infinité de A_n ou bien à une infinité de B_n .

3.(a) On a $\limsup A_n = B \cup C$ et $\liminf A_n = B \cap C$.

(b) On a $\limsup A_n = [-1, 3]$ et $\liminf A_n =]0, 2]$.

Montrons la limite supérieure. Soit $x \in [-1, 3]$. Alors, soit on a $x \leq 0$ et alors $x \in A_{2n+1}$ pour tout n , soit on a $x > 0$ et alors $x \in A_{2n}$ pour tout n . Dans les deux cas x est dans une infinité de A_n donc $x \in \limsup A_n$. On a donc montré que $[-1, 3] \subset \limsup A_n$. Pour montrer l'égalité considérons $x \notin [-1, 3]$, il suffit de montrer que $x \notin \limsup A_n$. Pour cela, on remarque que pour n suffisamment grand, $x \notin A_n$ (par exemple si $x < -1$, alors x n'est dans aucun A_{2n} et n'est plus dans les A_{2n+1} dès que $x < -1 - 1/(3n)$, ce qui est le cas à partir d'un certain rang). Donc x n'est que dans un nombre fini de A_n , ce qui signifie que $x \notin \limsup A_n$.

4. $\mathbb{P}(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$. $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$.

(a) On commence par utiliser la définition de $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$:

$$\mathbb{P}(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq n} A_k\right),$$

en utilisant que l'union sur n est croissante. Ensuite on remarque que, pour tout $n \geq 0$ et pour tout $m \geq n$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq n} A_k\right) \leq \mathbb{P}(A_m)$$

et donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq n} A_k\right) \leq \inf_{m \geq n} \mathbb{P}(A_m).$$

En revenant au début, on en déduit que

$$\mathbb{P}(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \inf_{m \geq n} \mathbb{P}(A_m) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n).$$

(b) On peut procéder de la même manière : on a

$$\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \downarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right),$$

en utilisant que l'intersection sur n est décroissante. Puis on remarque que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \geq \sup_{m \geq n} \mathbb{P}(A_m).$$

et on en déduit que

$$\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \downarrow \sup_{m \geq n} \mathbb{P}(A_m) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Une autre méthode est d'utiliser le résultat montré en 4.(a) et raisonner en passant au complémentaire avec 2.(b).

2. Probabilités discrètes

Exercice 4. Soit une urne contenant 2 boules blanches et une boule noire. Dans les deux cas suivants, modéliser l'espace de probabilité correspondant à l'expérience décrite et déterminer la probabilité de tirer au hasard 2 boules de couleurs différentes.

1. On effectue un premier tirage, puis après remise et mélange de la boule dans l'urne, on procède à un deuxième tirage.
2. On considère maintenant le cas d'un tirage sans remise : on choisit au hasard une boule, sans la replacer dans l'urne, on effectue un deuxième tirage.

Corrigé.

1. On peut prendre $\Omega = \{B, N\}^2 = \{(B, B), (B, N), (N, B), (N, N)\}$, où l'issue $(x, y) \in \Omega$ correspond à une première boule tirée de couleur x et une deuxième de couleur y . Puis on prend $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et

$$\mathbb{P} = \frac{4}{9}\delta_{(B,B)} + \frac{2}{9}\delta_{(B,N)} + \frac{2}{9}\delta_{(N,B)} + \frac{1}{9}\delta_{(N,N)}.$$

Ici, on choisit les coefficients à mettre devant chaque masse de Dirac en fonction de la probabilité d'obtenir ce résultat : par exemple la probabilité d'obtenir (B, N) est $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.

Alors $A = \{(B, N), (N, B)\}$ est l'événement '*tirer au hasard 2 boules de couleurs différentes*' et on a $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{9}$.

2. On prend les mêmes Ω et $\mathcal{A}$ mais

$$\mathbb{P} = \frac{1}{3}\delta_{(B,B)} + \frac{1}{3}\delta_{(B,N)} + \frac{1}{3}\delta_{(N,B)},$$

où on remarque par exemple que la probabilité d'obtenir (B, N) est à présent $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ parce qu'il n'y a pas de remise, et on procède de même pour les autres coefficients.

Ainsi on obtient $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}$.

Exercice 5. (Famille aléatoire)

1. Mathilde vous apprend qu'elle a deux enfants dont un prénommé Xavier. Quelle est la probabilité qu'elle ait une fille ?
2. Mathilde ajoute que Xavier est son aîné. Quelle est la probabilité qu'elle ait une fille ?

Corrigé. Dans les deux cas l'expérience peut être modélisée par $\Omega = \{F, G\}^2$ (où la première coordonnée correspond au premier enfant et la deuxième au deuxième, avec F pour fille et G pour garçon), $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et

$$\mathbb{P} = \frac{1}{4}\delta_{(F,F)} + \frac{1}{4}\delta_{(F,G)} + \frac{1}{4}\delta_{(G,F)} + \frac{1}{4}\delta_{(G,G)}.$$

Soit $A = \{(F, F), (F, G), (G, F)\}$ l'événement '*Mathilde a une fille*'.

1. Ici on travaille sachant $B = \{(G, G), (F, G), (G, F)\}$ qui est l'événement '*Mathilde a un garçon*'. On doit donc calculer

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\{(F, G), (G, F)\})}{\mathbb{P}(\{(G, G), (F, G), (G, F)\})} = \frac{2/4}{3/4} = \frac{2}{3}.$$

2. On travaille à présent sachant $C = \{(G, G), (G, F)\}$ qui est l'événement '*l'aîné de Mathilde est un garçon*'. On a alors

$$\mathbb{P}(A|C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(\{(G, F)\})}{\mathbb{P}(\{(G, G), (G, F)\})} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}.$$

3. Compléments

Exercice 6. On considère un ensemble de familles ayant 0, 1 ou 2 enfants. La probabilité pour une famille d'avoir 0, 1 ou 2 enfants est supposée égale à $1/4$, $1/2$, $1/4$. Vous rencontrez le petit Luc dans la rue, qui appartient à l'une de ces familles. Calculez la probabilité qu'il soit fils unique s'il vous dit :

1. qu'il n'a pas de frère.
2. qu'il n'a pas de sœur.

Corrigé. On prend pour Ω l'ensemble des familles possibles :

$$\Omega = \{V, F, G, FF, FG, GF, GG\},$$

où V est la famille vide (sans enfant), F signifie fille et G signifie garçon. Pour les familles à deux enfants, on tient compte de l'ordre dans lequel les enfants sont arrivés : FG signifie que l'aînée est une fille. On prend $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. D'après l'énoncé, la probabilité $\mathbb{P}$ doit vérifier

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{V\}) &= \frac{1}{4}, \\ \mathbb{P}(\{F, G\}) &= \frac{1}{2}, \\ \mathbb{P}(\{FF, FG, GF, GG\}) &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

On part du principe suivant : le sexe d'un enfant est indépendant du nombre d'enfants et du sexe des autres enfants. Cela implique $\mathbb{P}(\{F\}) = \mathbb{P}(\{G\})$ et $\mathbb{P}(\{FF\}) = \mathbb{P}(\{FG\}) = \mathbb{P}(\{GF\}) = \mathbb{P}(\{GG\})$. On obtient donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{F\}) &= \mathbb{P}(\{G\}) = \frac{1}{4}, \\ \mathbb{P}(\{FF\}) &= \mathbb{P}(\{FG\}) = \mathbb{P}(\{GF\}) = \mathbb{P}(\{GG\}) = \frac{1}{16}.\end{aligned}$$

Finalement la mesure de probabilité est

$$\mathbb{P} = \frac{1}{4}\delta_V + \frac{1}{4}\delta_F + \frac{1}{4}\delta_G + \frac{1}{16}\delta_{FF} + \frac{1}{16}\delta_{FG} + \frac{1}{16}\delta_{GF} + \frac{1}{16}\delta_{GG}.$$

On peut maintenant répondre aux questions :

1. L'événement $A = \{G\}$ correspond au fait que Luc soit fils unique. L'événement $B = \{G, FG, GF\}$ correspond au fait que Luc est dans la famille et n'a pas de frère. Alors, la probabilité demandée est

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \frac{2}{3}.$$

2. L'événement $C = \{G, GG\}$ correspond au fait que Luc est dans la famille et n'a pas de sœur. Alors, la probabilité demandée est

$$\mathbb{P}(A|C) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \frac{4}{5}.$$

Remarque : L'intérêt d'ordonner les enfants est que les 4 possibilités FF, FG, GF, GG pour une famille à deux enfants sont équiprobables. On pourrait traiter l'exercice en n'ordonnant pas les enfants (puisque l'ordre des enfants n'importe pas dans la question demandée), mais dans ce cas il faut prendre en compte dans la définition de $\mathbb{P}$ que la famille avec une fille et un garçon (dans un ordre quelconque) est deux fois plus probable que celle avec deux garçons ou que celle avec deux filles.

Exercice 7. (Plus de limites supérieures et inférieures) On considère un ensemble Ω et $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite de sous-ensembles de Ω . Si $A \subset \Omega$, on note $\mathbb{1}_A$ sa fonction indicatrice ($\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ sinon).

1. Relier les fonctions indicatrices $\mathbb{1}_{\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n}$ et $\mathbb{1}_{\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n}$ aux limites supérieures et inférieures des fonctions $\mathbb{1}_{A_n}$.

2. Montrer que les propriétés suivantes sont vérifiées.

- (a) $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \left\{ \sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{A_n} = \infty \right\}$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \left\{ \sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{(A_n)^c} < \infty \right\}$.
- (b) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \cap \limsup_{n \rightarrow \infty} B_n$. Y a-t-il toujours égalité ?

- (c) $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \cap \liminf_{n \rightarrow \infty} B_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n)$. Y a-t-il toujours égalité ?
3. Calculer $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ dans les cas suivants.
- (a) $A_n =]-\infty, a_n]$, où $a_{2k} = 1 + 1/(2k)$ et $a_{2k+1} = -1 - 1/(2k+1)$.
- (b) $A_n = p_n \mathbb{N}$, où $(p_n)_{n \geq 1}$ est la suite des nombres premiers.
- (c) $A_n = [\sin(n) - 1, \sin(n) + 1]$.
4. Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$, montrer que

$$\left] -\infty, \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \left[\subset \limsup_{n \rightarrow \infty} \left[-\infty, a_n \left[\subset \limsup_{n \rightarrow \infty} \left[-\infty, a_n \right] \subset \left] -\infty, \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \right].$$

Écrire une relation similaire avec la limite inférieure.

Corrigé.

1. On a l'égalité

$$\mathbb{1}_{\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{A_n}. \quad (2)$$

En effet, si $\mathbb{1}_{\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n}(x) = 1$, alors $x \in \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ et donc il existe $n_0 \geq 0$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $x \in A_n$. Ainsi on a $\mathbb{1}_{A_n}(x) = 1$ pour tout $n \geq n_0$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = 1$ et en particulier $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = 1$. D'autre part, si $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = 0$ alors $x \notin \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ et donc il existe une infinité de n tels que $x \notin A_n$, i.e. $\mathbb{1}_{A_n}(x) = 0$. Donc 0 est valeur d'adhérence de la suite $\mathbb{1}_{A_n}(x)$ et c'est forcément la plus petite (car $\mathbb{1}_{A_n}(x) \geq 0$), donc $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = 0$. Cela montre (2)

L'égalité

$$\mathbb{1}_{\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{A_n}$$

se démontre de façon similaire à (2) ou en passant au complémentaire dans (2) en utilisant la question 2(b) de l'Exercice 3.

- 2.(a) L'ensemble $\{\sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{A_n} = \infty\}$ est l'ensemble des éléments appartenant à une infinité de A_n , c'est donc $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$.
L'ensemble $\{\sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{(A_n)^c} < \infty\}$ est l'ensemble des éléments qui n'appartiennent à tous les A_n sauf un nombre fini, c'est donc $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$.

- (b) Si $x \in \limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n)$, alors x appartient à une infinité de $A_n \cap B_n$. Alors x appartient à une infinité de A_n et une infinité de B_n donc $x \in \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \cap \limsup_{n \rightarrow \infty} B_n$. Cela montre l'inclusion.

Il n'y a pas forcément égalité. Par exemple on peut considérer $A_{2n} = B_{2n+1} = \Omega$ et $B_{2n} = A_{2n+1} = \emptyset$. Alors $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \cap \limsup_{n \rightarrow \infty} B_n = \Omega$, mais $\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) = \emptyset$.

- (c) Soit $x \in \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \cap \liminf_{n \rightarrow \infty} B_n$. Alors $x \in \liminf_{n \rightarrow \infty} B_n$ donc x est dans tous les B_n à partir d'un certain rang n_0 . Mais $x \in \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ donc il existe une infinité de $n \geq n_0$ tel que $x \in A_n$ (sinon x ne serait que dans un nombre fini de A_n pour $n \geq 1$). Comme pour chaque $n \geq n_0$ on a $x \in B_n$, on en déduit qu'il existe une infinité de $n \geq n_0$ tel que $x \in A_n$. Et donc $x \in \limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n)$.

Il n'y a pas forcément égalité. Par exemple on peut considérer $A_{2n} = B_{2n} = \Omega$ et $B_{2n+1} = A_{2n+1} = \emptyset$. Alors $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \cap \liminf_{n \rightarrow \infty} B_n = \emptyset$, mais $\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) = \Omega$.

- 3.(a) On a $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n =]-\infty, 1]$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n =]-\infty, -1[$.
- (b) On a $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \{0\}$.
- (c) On a $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n =]-2, 2[$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \{0\}$. En effet, $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans $[-1, 1]$ (voir ci-dessous), donc pour tout $0 < x < 2$, il existe une infinité d'entiers n tels que $\sin(n) > x - 1$ et aussi une infinité de n tels que $\sin(n) < x - 1$. La première famille montre que $x \in \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ et la deuxième famille que $x \notin \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$. Il est ensuite facile de vérifier que $\pm 2 \notin \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ (car π est irrationnel donc on n'a jamais $\sin(n) \in \{-1, 1\}$) et $0 \in \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Vérifions à présent que $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans $[-1, 1]$. Tout d'abord le sous-groupe additif $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$ n'est pas monogène car π est irrationnel (si $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$, alors, comme $1 \in a\mathbb{Z}$, on

a $a \in \mathbb{Q}$ et on en déduit que $\pi \in \mathbb{Q}$), donc dense dans $\mathbb{R}$. Montrons que $\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}, (q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ tels que $p_n + 2\pi q_n \rightarrow \pi$. Par irrationalité de π , on voit que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas être bornée. Elle admet donc une sous-suite $(p_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Comme $-p_n - 2\pi(q_n - 1) \rightarrow \pi$, on peut supposer que $p_{\varphi(n)} \rightarrow \infty$. Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe $(p'_n)_{n \in \mathbb{N}}, (q'_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ tels que $p'_n + 2\pi q'_n \rightarrow x$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $\psi(n)$ tel que $p'_{\psi(n)} + 2p_{\varphi(\psi(n))} \geq 0$. Et on a $p'_{\psi(n)} + 2p_{\varphi(\psi(n))} + 2\pi(q'_n + 2q_n - 1) \rightarrow x$ donc on a bien approché x par des éléments de $\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$. Enfin, on remarque que $\{\sin(n) : n \in \mathbb{N}\} = \sin(\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z})$ qui est dense dans $[-1, 1]$ car $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ est continue et surjective.

4. Posons $L = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$. Rappelons que L est la plus grande valeur d'adhérence de $(a_n)_{n \geq 0}$. Soit $x < L$. Alors il existe une infinité de n tels que $x < a_n$ (en considérant une sous-suite de $(a_n)_{n \geq 0}$ convergeant vers L , on sait quelle sera strictement supérieure à x à partir d'un certain rang). Mais cela veut exactement dire que $x \in \limsup_{n \rightarrow \infty}]-\infty, a_n[$. On a donc montré l'inclusion

$$]-\infty, L[\subset \limsup_{n \rightarrow \infty}]-\infty, a_n[.$$

L'inclusion

$$\limsup_{n \rightarrow \infty}]-\infty, a_n[\subset \limsup_{n \rightarrow \infty}]-\infty, a_n].$$

découle simplement du fait que $]-\infty, a_n[\subset]-\infty, a_n]$. Finalement, soit $x \in \limsup_{n \rightarrow \infty}]-\infty, a_n]$. Alors il existe une infinité de n tels que $x \leq a_n$. Il existe donc une sous-suite infinie de $(a_n)_{n \geq 0}$ dans $[x, \infty]$, qui est compact, cette limite a donc au moins une valeur d'adhérence $\ell \in [x, \infty]$. Mais ℓ est aussi valeur d'adhérence de $(a_n)_{n \geq 0}$ donc $\ell \leq L$ (car L est la plus grande!). Donc $x \leq \ell \leq L$. On a donc montré l'inclusion

$$\limsup_{n \rightarrow \infty}]-\infty, a_n] \subset]-\infty, L],$$

ce qui conclut la preuve de la suite d'inclusion.

Pour la limite inférieure, on a

$$]-\infty, \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n[\subset \liminf_{n \rightarrow \infty}]-\infty, a_n[\subset \liminf_{n \rightarrow \infty}]-\infty, a_n] \subset]-\infty, \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n].$$

Exercice 8. (Les pièges du conditionnement) Un test de dépistage d'une maladie est mis au point par un laboratoire pharmaceutique qui se propose d'en déterminer l'efficacité. Il estime pour cela la probabilité α (resp. β) que le test soit positif (resp. négatif) alors que la personne considérée est malade (resp. saine) en testant un échantillon de personnes malades (resp. saines) au sein d'une population donnée. Le résultat de cette d'étude donne $\alpha = \beta = 0,99$. En outre, on sait que la proportion de personnes malades dans la population est de $p = 1/1000$. Proposer des indicateurs d'efficacité du test et les évaluer.

Corrigé. On modélise l'expérience aléatoire d'un individu aléatoirement choisi (de manière uniforme dans la population) qui prend le test pour savoir s'il est malade ou non. Les deux indicateurs d'efficacité sont la probabilité que l'individu soit malade sachant que le test est positif et la probabilité que l'individu soit sain sachant que le test est négatif. On aimerait que ces deux quantités soit aussi proche de 1 que possible.

Deux caractéristiques de l'individu nous intéressent : le fait qu'il soit sain (noté S) ou malade (noté M) et le fait que son test soit positif (noté P) ou négatif (noté N). Ainsi on considère l'espace $\Omega = \{(M, P), (M, N), (S, P), (S, N)\}$ muni de $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et

$$\mathbb{P} = p\alpha\delta_{(M,P)} + p(1-\alpha)\delta_{(M,N)} + (1-p)(1-\beta)\delta_{(S,P)} + (1-p)\beta\delta_{(S,N)}.$$

Voici comment on a choisit les coefficients devant les masses de Dirac dans la définition de $\mathbb{P}$. On veut que $\mathbb{P}(\{(M, P)\})$ soit égal à la probabilité d'être malade et positif. L'énoncé nous dit que la probabilité d'être positif sachant qu'on est malade est α et que la probabilité d'être malade est p (puisque qu'on considère un individu choisi uniformément dans la population où il y a une proportion p

de malades). Ainsi $\mathbb{P}(\{(M, P)\}) = \mathbb{P}(\text{malade}) \cdot \mathbb{P}(\text{positif}|\text{malade}) = p\alpha$. On procède de même pour les autres.

On pose $A = \text{'l'individu est malade'}$ et $B = \text{'le test est positif'}$, de sorte que nos indicateurs sont $\mathbb{P}(A|B)$ et $\mathbb{P}(A^c|B^c)$. On peut les évaluer avec la formule de Bayes par exemple :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{p\alpha}{\mathbb{P}(\{(M, P), (S, P)\})} = \frac{p\alpha}{p\alpha + (1-p)(1-\beta)} \simeq 0.09$$

et

$$\mathbb{P}(A^c|B^c) = \frac{\mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c|A^c)}{\mathbb{P}(B^c)} = \frac{(1-p)\beta}{\mathbb{P}(\{(M, N), (S, N)\})} = \frac{(1-p)\beta}{(1-p)\beta + p(1-\alpha)} \simeq 0.99999.$$

Tel quel, ce test de dépistage produit énormément de faux positif : quand on reçoit un test positif, on a 91% de chance d'être en fait en bonne santé. Cependant le test détecte efficacement les malades car il y a très peu de faux négatif : quand on reçoit un test négatif, on a seulement 0.001% de chance d'être en fait malade.

On peut donc dire que le test n'est pas très satisfaisant. Mais d'un point de vue sanitaire il est important de réduire au maximum le nombre de faux négatifs pour isoler les personnes malades, ce qui est le cas ici. Le problème est juste qu'on isolera en grande majorité des personnes saines, mais peu de personnes malades passeront à travers les mailles.