

TD 1 – Rappels de théorie de la mesure et de probabilités discrètes

1. Théorie de la mesure

Définition :

- ▷ Un *espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un ensemble Ω muni d'une tribu $\mathcal{A}$ sur laquelle est définie une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ (c'est-à-dire une mesure telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$).
- ▷ Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Une *variable aléatoire* à valeurs dans E est une fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(E, \mathcal{E})$.

Exercice 1. (Mesure image) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et X une variable aléatoire à valeurs dans E . Pour $B \in \mathcal{E}$, on pose $\mu(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$. Montrer que μ est une mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{E})$. On l'appelle la *mesure image de $\mathbb{P}$ par X* .

Exercice 2. (Fonction de répartition) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ (muni des boréliens). Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}).$$

1. Montrer que F est croissante.
2. Montrer que F est continue à droite.
3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.

Exercice 3. (Limites supérieures et inférieures d'ensembles) On considère un ensemble Ω et $(A_n)_{n \geq 1}$, $(B_n)_{n \geq 1}$ des suites de sous-ensembles de Ω .

1. Décrire avec des mots les ensembles suivants

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k.$$

2. Montrer que les propriétés suivantes sont vérifiées.

- (a) $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$.
- (b) $(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n)^c = \liminf_{n \rightarrow \infty} (A_n)^c$
- (c) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \cup \limsup_{n \rightarrow \infty} B_n$.

3. Calculer $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ dans les cas suivants.

- (a) $A_{2n} = B$ et $A_{2n+1} = C$, où $B, C \subset \Omega$ sont fixés.
- (b) $A_{2n} =]0, 3 + 1/(2n)[$ et $A_{2n+1} =] - 1 - 1/(3n), 2[$.

4. Supposons à présent que $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité et que $(A_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$. Montrer que les propriétés suivantes sont vérifiées.

- (a) $\mathbb{P}(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$.
- (b) $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Rappel. Pour $(a_n)_{n \geq 0} \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$, on définit $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k$.

2. Probabilités discrètes

Exercice 4. Soit une urne contenant 2 boules blanches et une boule noire. Dans les deux cas suivants, modéliser l'espace de probabilité correspondant à l'expérience décrite et déterminer la probabilité de tirer au hasard 2 boules de couleurs différentes.

1. On effectue un premier tirage, puis après remise et mélange de la boule dans l'urne, on procède à un deuxième tirage.
2. On considère maintenant le cas d'un tirage sans remise : on choisit au hasard une boule, sans la replacer dans l'urne, on effectue un deuxième tirage.

Exercice 5. (Famille aléatoire)

1. Mathilde vous apprend qu'elle a deux enfants dont un prénommé Xavier. Quelle est la probabilité qu'elle ait une fille ?
2. Mathilde ajoute que Xavier est son aîné. Quelle est la probabilité qu'elle ait une fille ?

3. Compléments

Exercice 6. On considère un ensemble de familles ayant 0, 1 ou 2 enfants. La probabilité pour une famille d'avoir 0, 1 ou 2 enfants est supposée égale à $1/4$, $1/2$, $1/4$. Vous rencontrez le petit Luc dans la rue, qui appartient à l'une de ces familles. Calculez la probabilité qu'il soit fils unique s'il vous dit :

1. qu'il n'a pas de frère.
2. qu'il n'a pas de sœur.

Exercice 7. (Plus de limites supérieures et inférieures) On considère un ensemble Ω et $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite de sous-ensembles de Ω . Si $A \subset \Omega$, on note $\mathbb{1}_A$ sa fonction indicatrice ($\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ sinon).

1. Relier les fonctions indicatrices $\mathbb{1}_{\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n}$ et $\mathbb{1}_{\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n}$ aux limites supérieures et inférieures des fonctions $\mathbb{1}_{A_n}$.
2. Montrer que les propriétés suivantes sont vérifiées.
 - (a) $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \left\{ \sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{A_n} = \infty \right\}$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \left\{ \sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{(A_n)^c} < \infty \right\}$.
 - (b) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \cap \limsup_{n \rightarrow \infty} B_n$. Y a-t-il toujours égalité ?
 - (c) $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \cap \liminf_{n \rightarrow \infty} B_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n)$. Y a-t-il toujours égalité ?
3. Calculer $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ dans les cas suivants.
 - (a) $A_n =]-\infty, a_n]$, où $a_{2k} = 1 + 1/(2k)$ et $a_{2k+1} = -1 - 1/(2k+1)$.
 - (b) $A_n = p_n \mathbb{N}$, où $(p_n)_{n \geq 1}$ est la suite des nombres premiers.
 - (c) $A_n = [\sin(n) - 1, \sin(n) + 1]$.
4. Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, montrer que

$$\left] -\infty, \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \right[\subset \limsup_{n \rightarrow \infty} \left[-\infty, a_n \right[\subset \limsup_{n \rightarrow \infty} \left[-\infty, a_n \right] \subset \left] -\infty, \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \right].$$

Écrire une relation similaire avec la limite inférieure.

Exercice 8. (Les pièges du conditionnement) Un test de dépistage d'une maladie est mis au point par un laboratoire pharmaceutique qui se propose d'en déterminer l'efficacité. Il estime pour cela la probabilité α (resp. β) que le test soit positif (resp. négatif) alors que la personne considérée est malade (resp. saine) en testant un échantillon de personnes malades (resp. saines) au sein d'une population donnée. Le résultat de cette étude donne $\alpha = \beta = 0,99$. En outre, on sait que la proportion de personnes malades dans la population est de $p = 1/1000$. Proposer des indicateurs d'efficacité du test et les évaluer.