

TD 10 – Borel–Cantelli, convergence p.s. et loi des grands nombres

1. Lemmes de Borel–Cantelli et convergence p.s.

Exercice 1. On tire une infinité de fois à pile ou face avec une pièce équilibrée de manière indépendante. Montrer que, presque sûrement, on obtient une infinité de fois face et une infinité de fois pile.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes et de loi exponentielle de paramètre 1. On pose, pour $n \geq 2$

$$Z_n = \frac{\max(X_1, \dots, X_n)}{\log n}.$$

- 1.(a) Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Montrer que $\sum_{n \geq 2} \mathbb{P}(Z_n \leq 1 - \varepsilon) < \infty$.
(b) En déduire que $\liminf_{n \rightarrow \infty} Z_n \geq 1 - \varepsilon$ p.s.
(c) En déduire que $\liminf_{n \rightarrow \infty} Z_n \geq 1$ p.s.
- 2.(a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(Z_{2^k} \geq 1 + \varepsilon) < \infty$.
(b) En déduire que $\limsup_{k \rightarrow \infty} Z_{2^k} \leq 1 + \varepsilon$ p.s.
(c) En déduire que $\limsup_{n \rightarrow \infty} Z_n \leq 1$ p.s.
3. Conclure.

2. Loi des grands nombres

Exercice 3. (Moments empiriques) Soit X une v.a. réelle.

1. Si X a un moment d'ordre k fini, comment faire pour l'approcher numériquement (en supposant que l'on sait simuler X) ?
2. Si X a un moment d'ordre 2 fini, comment faire pour approcher sa variance numériquement ?

Exercice 4. (Le cas des variables aléatoires qui ne sont pas dans L^1)

- 1.(a) Soit X une v.a. positive. Montrer que pour tout $\alpha > 0$ on a l'équivalence suivante :

$$\mathbb{E}[X] < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq \alpha n) < \infty.$$

Indication. On pourra utiliser que $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x) dx$.

- (b) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. positives. Montrer que, presque sûrement, on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbb{E}[X_1] < \infty, \\ \infty & \text{si } \mathbb{E}[X_1] = \infty. \end{cases}$$

- 2.(a) Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels. Montrer que, si la suite $((x_1 + \dots + x_n)/n)_{n \geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}$, alors $x_n/n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.
(b) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelles i.i.d. telle que $\mathbb{E}[|X_1|] = \infty$. Montrer que, p.s., la suite $((X_1 + \dots + X_n)/n)_{n \geq 1}$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$.
3. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. positives telle que $\mathbb{E}[X_1] = \infty$.
(a) Soit $M > 0$. Pour $n \geq 1$, on pose $Y_n = \min(X_n, M)$. Montrer que

$$\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}[\min(X_1, M)].$$

(b) En déduire que

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \infty.$$

3. Compléments

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelles. Supposons qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X_n| > M) < \infty.$$

Montrer que, p.s., la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est bornée.

Exercice 6. Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. En utilisant la loi des grands nombres, déterminer la limite, quand $n \rightarrow \infty$, de

$$\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) dx_1 \cdots dx_n.$$

Exercice 7. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelle et $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres positifs telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$. Supposons que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_{n+1} - X_n| > \varepsilon_n) < \infty.$$

Montrer que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge p.s.

Exercice 8. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelles convergeant en probabilité vers X .

1. Construire par récurrence une fonction strictement croissante $\varphi: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(|X_{\varphi(n)} - X| \geq 1/n) \leq 2^{-n}$.
2. En déduire que $(X_n)_{n \geq 1}$ possède une sous-suite convergeant p.s. vers X .

Exercice 9. (Théorème de Bernstein-Weierstrass) Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Le n -ième polynôme de Bernstein de f est défini par

$$B_n(x) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \in [0, 1].$$

De plus, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, on considère une v.a. $S_{n,x}$ de loi binomiale de paramètre (n, x) .

1. En notant que $B_n(x) = \mathbb{E}[f(S_{n,x}/n)]$, montrer sans calcul que B_n converge simplement vers f .
2. On veut montrer que B_n converge uniformément vers f .
 - (a) Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant l'uniforme continuité de f , montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \geq 1$,

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_{\infty} \mathbb{P}(|S_{n,x} - x| \geq \eta)$$

- (b) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Chebychev, conclure.

Exercice 10. Soit $(Z_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelles avec Z_n de loi exponentielle de paramètre n .

- 1.(a) Montrer que Z_n converge presque sûrement vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$.
(b) En déduire que, presque sûrement, à partir d'un certain rang, $Z_n < Z_1$.
2. On suppose ici que les v.a. $(Z_n)_{n \geq 1}$ sont indépendantes. Calculer la somme $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(Z_n \geq Z_1)$.
3. Commenter.

Exercice 11. Proposer une méthode de Monte-Carlo pour approcher numériquement π .