

TD 11 – Convergence en loi

1. Convergence en loi

Exercice 1. (Convergence en loi de masses de Dirac) Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels et $x \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence suivante :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x \quad \Leftrightarrow \quad \delta_{x_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{étroit.}} \delta_x.$$

Exercice 2. (Convergence en loi et densités)

1. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelles continues. On suppose que les densités des X_n convergent simplement vers une fonction $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p_{X_n}(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p(x).$$

On suppose également qu'il existe une fonction $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p_{X_n}(x) \leq q(x) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} q(x) dx < \infty.$$

Montrer que p est une densité de probabilité et que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une v.a. X de densité p .

Remarque. On peut remplacer l'hypothèse de domination par l'hypothèse que $\int_{\mathbb{R}} p(x) dx = 1$, voir l'exercice 5.

2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelles continues telles que

$$p_{X_n}(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(e^{-x^2/2} + e^{-(x-n)^2/2} \right).$$

Montrer que les densités p_{X_n} convergent simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction p , mais que $(X_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas en loi vers une v.a. X de densité p .

Exercice 3. (Stabilité par opérations ?) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. convergeant en loi vers X .

1. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que $(f(X_n))_{n \geq 1}$ converge en loi vers $f(X)$.
2. Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. convergeant en loi vers Y . A-t-on convergence en loi de $(X_n + Y_n)_{n \geq 1}$ vers $X + Y$?
3. Reprendre la question précédente en supposant en outre que X et Y sont constantes p.s.

Exercice 4.

1. Pour $n \geq 1$, soit U_n une v.a. uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. Montrer que $(U_n/n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une v.a. uniforme sur $[0, 1]$.
2. Soit $\lambda > 0$. Pour $n \geq 1$, soit X_n une v.a de loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\lambda/n}$. Montrer que $(X_n/n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une v.a. exponentielle de paramètre λ .

Exercice 5. (Lemme de Scheffé) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelles continues. Notons f_n la densité de X_n . On suppose que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge Lebesgue-presque partout vers une fonction f telle que $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$.

1. Montrer que $|f - f_n| = 2(f - f_n)_+ + f_n - f$.

2. On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} |f - f_n| d\lambda = 2 \int_{\mathbb{R}} (f - f_n)_+ d\lambda.$$

3. En déduire que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge vers f dans $L^1(\mathbb{R}, \lambda)$.

4. En déduire que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une v.a. de densité f .

2. Compléments

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. convergeant en loi vers X .

1. A-t-on $\mathbb{E}[|X_n|] \rightarrow \mathbb{E}[|X|]$?
2. Montrer que $\mathbb{E}[|X|] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n|]$.

Exercice 7. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. convergeant en loi vers une v.a. constante X . Soit $(b_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels. Montrer que $(X_n + b_n)_{n \geq 1}$ converge en loi si et seulement si $(b_n)_{n \geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}$.

Exercice 8. (Discrétisation de mesure)

1. Soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Pour tout $n \geq 1$, on définit une mesure de probabilité μ_n sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par :

$$\mu_n := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu([k/n, (k+1)/n]) \delta_{k/n}.$$

On veut montrer que μ_n converge étroitement vers μ quand $n \rightarrow \infty$.

- (a) Soit X une v.a. de loi μ . On pose $X_n = \lfloor nX \rfloor / n$ ($\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x). Montrer que X_n suit la loi μ_n .
 - (b) Montrer que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge p.s. vers X .
 - (c) Conclure.
2. Quelle est la loi μ_n si μ est la mesure uniforme sur $[0, 1]$? Et si μ est la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$? Comparer avec l'exercice 4.

Exercice 9. (Encore un peu de convergence p.s.) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelles i.i.d. On note F la fonction de répartition de X_1 et on suppose que X_1 n'est pas p.s. constante. On pose

$$\alpha := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > 0\} \quad \text{et} \quad \beta := \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}.$$

Remarque. On appelle α l'infimum essentiel de X_1 et β le supremum essentiel.

1. Montrer que $\alpha < \beta$, que $\alpha \neq +\infty$ et que $\beta \neq -\infty$.
- 2.(a) Soit $x > \alpha$. Montrer que

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_n \leq x) = \infty.$$

- (b) En déduire que $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n = \alpha$ p.s.
3. Montrer que $\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = \beta$ p.s.
 4. Dans quel cas la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge-t-elle p.s. ? Et dans quel cas converge-t-elle en loi ?