

TD 12 – Caractérisations de la convergence en loi

1. Convergence en loi et fonction de répartition

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelles dont les fonctions de répartitions sont données ci-dessous. Dans chaque cas, justifier s'il y a convergence en loi ou non et, si oui, déterminer la loi de la limite.

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $F_{X_n}(a) = [1 - \frac{1}{2}(1 - \frac{2a}{n})^n] \mathbb{1}_{0 \leq a < n/2} + \mathbb{1}_{a \geq n/2}$.
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $F_{X_n}(a) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{a \geq (-1)^n} + \frac{1}{2} \mathbb{1}_{a \geq 3}$.
3. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $F_{X_n}(a) = \frac{1}{3} \mathbb{1}_{a \geq 1/n} + \frac{2}{3} a^n \mathbb{1}_{a \in [0,1[} + \frac{2}{3} \mathbb{1}_{a \geq 1}$.
4. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $F_{X_n}(a) = \frac{1}{2} [1 - e^{-(a-n)}] \mathbb{1}_{a \geq n} + \frac{1}{2} \mathbb{1}_{a \geq 0}$.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelles convergeant en loi vers X . On suppose que X n'a pas d'atome, i.e. $\mathbb{P}(X = a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tout $a < b$, $\mathbb{P}(X_n \in]a, b]) \rightarrow \mathbb{P}(X \in]a, b])$ quand $n \rightarrow \infty$.
2. Montrer que, pour tout $b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X_n = b) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.
3. Montrer que, pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X_n \in I) \rightarrow \mathbb{P}(X \in I)$ quand $n \rightarrow \infty$.

2. Convergence en loi de v.a. discrètes

Exercice 3. Pour chaque $n \geq 1$, on considère $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$ des v.a. indépendantes de loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$ et on pose $M_n = \min(X_{n,1}, \dots, X_{n,n})$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(M_n \geq k)$ et en déduire $\mathbb{P}(M_n = k)$.
2. Montrer que $(M_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une v.a. M de loi géométrique de paramètre $1 - e^{-1}$.

3. Convergence en loi et fonction caractéristique

Exercice 4. (Une loi faible par les fonctions caractéristiques) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelles i.i.d telle que $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. Soit $m = \mathbb{E}[X_1]$.

1. Montrer que, quand $\theta \rightarrow 0$, on a $\phi_{X_1}(\theta) = e^{im\theta} + o(\theta)$.
2. En utilisant le théorème de Lévy, montrer que

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} m.$$

Indication : On pourra utiliser que, pour $z, w \in \mathbb{C}$ de modules inférieurs à 1, $|z^n - w^n| \leq n|z - w|$.

3. En déduire que

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} m.$$

Exercice 5. (Limite de gaussiennes) Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles de loi $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ avec $m_n \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n \in \mathbb{R}_+$. Par convention, lorsque $\sigma = 0$, la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est la masse de Dirac δ_m .

Rappel. La fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est $\theta \mapsto \exp(im\theta - \sigma^2\theta^2/2)$ (on peut noter que cette formule fonctionne aussi dans le cas $\sigma = 0$).

1. Supposons que $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers respectivement $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi et identifier sa limite.

2. Supposons que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi.

- (a) En considérant $|\phi_{Y_n}|$ montrer que $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $\sigma \in \mathbb{R}_+$.
- (b) Montrer que $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- (c) En déduire que $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $m \in \mathbb{R}$

4. Compléments

Exercice 6. (Maximum d'exponentielles) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1. Soit $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Montrer que $(M_n - \log n)_{n \geq 1}$ converge en loi et déterminer la limite.

Exercice 7. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(X_n = k)$ converge vers un réel p_k quand $n \rightarrow \infty$. À quelle condition sur les p_k a-t-on convergence en loi de $(X_n)_{n \geq 1}$?

Exercice 8. On reprend la question 2 de l'exercice 2 du TD11. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelles continues telles que

$$p_{X_n}(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(e^{-x^2/2} + e^{-(x-n)^2/2} \right).$$

En utilisant les fonctions de répartition, montrer que $(X_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas en loi.

Exercice 9. (Convergence étroite de mesures finies) Soit $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots$ des mesures finies sur $\mathbb{R}$. On dit que $(\mu_n)_{n \geq 1}$ converge étroitement vers μ si, pour toute fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée,

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f d\mu.$$

1. Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs convergeant vers $a > 0$. Pour $n \geq 1$, soit μ_n la mesure de Lebesgue sur $[0, a_n]$. Montrer que $(\mu_n)_{n \geq 1}$ converge étroitement vers une limite à déterminer.
2. Pour $n \geq 1$, soit $\mu_n = \delta_n$. Soit μ la mesure nulle. Montrer que, pour toute fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue à support compact, $\int_{\mathbb{R}} f d\mu_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f d\mu$, mais que $(\mu_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas étroitement vers μ .
3. Soit $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots$ des mesures finies sur $\mathbb{R}$. Montrer que $(\mu_n)_{n \geq 1}$ converge étroitement vers μ si et seulement si $\mu_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mu(\mathbb{R})$ et, pour toute fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue à support compact, $\int_{\mathbb{R}} f d\mu_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f d\mu$.

Exercice 10. (Une partie du théorème de Prokhorov sur $\mathbb{R}$) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles. La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *tendue* si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(|X_n| \geq M) \leq \varepsilon.$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que, si la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est tendue, alors elle admet une sous-suite qui converge en loi. On suppose donc que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est tendue.

1. On note F_n la fonction de répartition de X_n . Soit $q \in \mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe une extractrice $\psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $F_{\psi(n)}(q)$ converge vers une limite $G(q)$ quand $n \rightarrow \infty$.
2. En déduire qu'il existe une extractrice $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que, pour tout $q \in \mathbb{Q}$, $F_{\varphi(n)}(q)$ converge vers $G(q)$ quand $n \rightarrow \infty$.
3. On définit, pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) := \inf\{G(q) : q \in \mathbb{Q} \cap]x, \infty[\}$. Montrer qu'il existe une v.a. réelle X telle que F soit la fonction de répartition de X .
4. Montrer que $(X_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers X .