

TD 13 – Théorème central limite

1. Applications du théorème central limite

Exercice 1. On s'intéresse ici à la convergence de la suite suivante

$$u_n = e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}.$$

1. Écrire u_n comme une probabilité impliquant une v.a. X_n de loi de Poisson de paramètre n .
2. En utilisant que X_n a la même loi que la somme de n v.a. i.i.d. de loi de Poisson de paramètre 1, ainsi que le théorème central limite, déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 2. (Monte-Carlo) Soit X le gain réalisé à un jeu de hasard donné. On suppose que l'on connaît les règles du jeu, de sorte que l'on sait simuler numériquement la v.a. X .

1. Comment estimer numériquement $\mathbb{P}(X \geq 10)$ de sorte que l'estimation soit précise à 0,001 près avec probabilité au moins 99% ?
2. Supposons que l'on sache que le gain réalisé est entre -5 et 20 . Comment estimer numériquement $\mathbb{E}[X]$ de sorte que l'estimation soit précise à 0,001 près avec probabilité au moins 99% ?

Exercice 3. (Intervalle de confiance asymptotique) On observe des v.a. $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. dont la loi appartient à la famille $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$, où P_θ est la loi exponentielle de paramètre θ . On suppose que $\Theta = [1, \infty[$. Soit $\alpha \in]0, 1[$.

1. On rappelle que, si X a loi P_θ , on a $\mathbb{E}[X] = 1/\theta$ et $\text{Var}(X) = 1/\theta^2$. Construire un intervalle de confiance asymptotique pour $1/\theta$ de niveau $1 - \alpha$.
2. En déduire un intervalle de confiance asymptotique pour θ de niveau $1 - \alpha$.
3. Aurait-on pu utiliser cette méthode si $\Theta =]0, \infty[$?

2. Hors du cadre du théorème central limite

Exercice 4. (Sommes de Cauchy) Rappelons que la *loi de Cauchy* (centrée) de paramètre $a > 0$ est la loi suivante sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{a}{\pi(a^2 + x^2)} dx.$$

Il est montré à l'exercice 9 du TD 3 que sa fonction caractéristique est $\theta \mapsto e^{-a|\theta|}$.

1. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Cauchy de paramètres $a_1, \dots, a_n$. Déterminer la loi de $X_1 + \dots + X_n$.
2. Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi de Cauchy de paramètre 1. Déterminer la loi de $(X_1 + \dots + X_n)/n$ et en déduire une convergence. Commenter.

3. Compléments

Exercice 5. (Intervalle de confiance asymptotique suite) On reprend le cadre de l'Exercice 3, mais on suppose à présent que $\Theta =]0, \infty[$. Soit $\alpha \in]0, 1[$.

1. Si X est de loi P_θ , calculer $\mathbb{E}[e^{-X}]$ et $\text{Var}(e^{-X})$. Montrer que $\text{Var}(e^{-X}) \leq 1/4$.
2. En déduire un intervalle de confiance asymptotique pour $\theta/(1 + \theta)$ de niveau $1 - \alpha$.
3. En déduire un intervalle de confiance asymptotique pour θ de niveau $1 - \alpha$.

Exercice 6. (Loi stable) Soit P une loi sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} x^2 P(dx) \in]0, \infty[$ et satisfaisant la propriété suivante : si X et Y sont deux v.a. indépendantes de loi P , alors $(X + Y)/\sqrt{2}$ a aussi loi P . On veut trouver les lois P possibles satisfaisant cette propriété.

1. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} x P(dx) = 0$.
2. On se donne une suite $(X_k)_{k \geq 1}$ de v.a. i.i.d. de loi P . Pour $n \geq 0$, on pose

$$Z_n := \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{i=1}^{2^n} X_i.$$

Quelle est la loi de Z_n ?

3. En utilisant le théorème central limite, en déduire que $P = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, où $\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 P(dx)$.

Exercice 7. (Calcul à la louche) On lance répétitivement un dé à six faces équilibré jusqu'à obtenir un résultat total supérieur ou égal à 300. En utilisant le théorème central limite, approximer la probabilité qu'il faille effectuer au moins 80 lancers.

Exercice 8. (Un TCL pour une somme inhomogène) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelles i.i.d. telle que $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$ et $\mathbb{E}[X_1] = 0$. On pose $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$ et on suppose $\sigma^2 > 0$. Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels bornée telle que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a^2,$$

pour un certain $a > 0$. On s'intéresse à la convergence en loi de

$$Z_n = \frac{a_1 X_1 + \dots + a_n X_n}{\sqrt{n}}.$$

1. Calculer ϕ_{Z_n} en terme de ϕ_{X_1} .
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que

$$\sup_{k \geq 1} n \cdot \left| \phi_{X_1} \left(\frac{a_k \theta}{\sqrt{n}} \right) - e^{-a_k^2 \sigma^2 \theta^2 / (2n)} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

3. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, pour tous $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ de modules inférieurs ou égaux à 1,

$$\left| \prod_{k=1}^n z_k - \prod_{k=1}^n w_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k - w_k|.$$

4. En déduire que

$$\left| \phi_{Z_n}(\theta) - \exp \left(-\frac{\sigma^2 \theta^2}{2n} \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

5. En conclure que $(Z_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, a^2 \sigma^2)$.