

## TD 14 – Révisions

### 1. Toujours plus de convergences

**Exercice 1.** Soit  $(U_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a. indépendantes de loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Pour  $n \geq 1$ , on pose

$$M_n := \max\left(\frac{1}{\sqrt{U_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{U_n}}\right).$$

1. Calculer la fonction de répartition de  $M_n$ .
2. Soit  $p > 0$ . Déterminer les valeurs de  $p$  telles que  $M_n$  a un moment d'ordre  $p$  fini.
3. Montrer que  $M_n/\sqrt{n}$  converge en loi quand  $n \rightarrow \infty$  vers une v.a. dont on déterminera la loi

**Exercice 2.** Soit  $(A_n)_{n \geq 1}$  une suite d'événements indépendants. Pour  $n \geq 1$ , on pose  $a_n := \mathbb{P}(A_n)$  et

$$b_n := \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{et} \quad S_n := \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k}.$$

On suppose que  $b_n \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

1. Montrer que  $S_n/b_n \rightarrow 1$  dans  $L^2$  quand  $n \rightarrow \infty$ .
2. Pour tout  $k \geq 1$ , on pose  $n_k := \inf\{n \in \mathbb{N} : b_n \geq k^2\}$ . Montrer que  $k^2 \leq b_{n_k} < k^2 + 1$  et que  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.
3. Montrer que  $S_{n_k}/b_{n_k} \rightarrow 1$  presque sûrement quand  $k \rightarrow \infty$ .
4. En déduire que  $S_n/b_n \rightarrow 1$  presque sûrement quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Exercice 3. (Convergence en loi de sommes de v.a.)** Soient  $(X_n)_{n \geq 1}$  et  $(Y_n)_{n \geq 1}$  deux suites de v.a. réelles convergeant en loi vers des v.a.  $X$  et  $Y$ . On a vu au TD11 qu'en général on n'a pas convergence en loi de  $(X_n + Y_n)_{n \geq 1}$  vers  $X + Y$ . On va voir ci-dessous deux cas où c'est vrai.

1. On suppose ici que  $X_n$  et  $Y_n$  sont indépendantes pour tout  $n \geq 1$  et que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes. En utilisant le théorème de Lévy, montrer que  $(X_n + Y_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers  $X + Y$ .
2. On suppose que  $Y$  est constante p.s. (mais plus l'indépendance). On veut montrer que  $(X_n + Y_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers  $X + Y$ .
  - (a) Montrer qu'il suffit de montrer  $\mathbb{E}[f(X_n + Y_n)] \rightarrow \mathbb{E}[f(X + Y)]$  pour toute fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  lipschitzienne bornée. On considère à présent  $f$  une telle fonction.
  - (b) Soit  $\varepsilon > 0$ . Montrer que

$$|\mathbb{E}[f(X_n + Y_n)] - \mathbb{E}[f(X_n + Y)]| \leq 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(|Y_n - Y| > \varepsilon) + L\varepsilon,$$

où  $L$  est la constante de Lipschitz de  $f$ .

- (c) En déduire que  $|\mathbb{E}[f(X_n + Y_n)] - \mathbb{E}[f(X_n + Y)]| \rightarrow 0$ .
- (d) Montrer que  $|\mathbb{E}[f(X_n + Y)] - \mathbb{E}[f(X + Y)]| \rightarrow 0$ .
- (e) Conclure.

## 2. Compléments

**Exercice 4.** On observe des v.a. réelles  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. dont la loi appartient à la famille  $(P_\theta)_{\theta \in [1,4]}$ , où  $P_\theta$  est définie par

$$P_\theta(dx) = \frac{3\theta^3}{x^4} \mathbb{1}_{[\theta, \infty[}(x) dx.$$

On rappelle que si  $X_1$  a pour loi  $P_\theta$  pour un certain  $\theta \in [1, 4]$ , alors  $\mathbb{E}[X_1] = \frac{3\theta}{2}$  et  $\text{Var}(X_1) = \frac{3\theta}{4}$ . Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ . En utilisant le théorème central limite, construire un intervalle de confiance asymptotique pour  $\theta$  de niveau  $1 - \alpha$ .

**Exercice 5.** Soit  $X \in L^2$ . Pour  $n \geq 1$ , on pose

$$Y_n = n^2 \left( 1 - \cos\left(\frac{X}{n}\right) \right).$$

Montrer que  $(Y_n)_{n \geq 1}$  converge dans  $L^1$  vers une limite à déterminer.

**Exercice 6.** Soit  $(p_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels dans  $]0, 1[$ . Pour chaque  $n \geq 1$ , soit  $X_n$  une v.a. de loi Binomiale( $n, p_n$ ). Dans ce cours, on a déjà vu que :

▷ Si  $p_n = p \in ]0, 1[$  est fixé, alors par le TCL

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1).$$

▷ Si  $np_n \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ , alors

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \text{Poisson}(\lambda).$$

Ici on suppose que  $p_n \rightarrow 0$  mais  $np_n \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ . On va montrer que

$$Z_n := \frac{X_n - np_n}{\sqrt{np_n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1).$$

1. Montrer que, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\phi_{Z_n}(\theta) = \left( e^{-i\theta\sqrt{p_n/n}} \left( 1 + p_n \left( e^{i\theta/\sqrt{np_n}} - 1 \right) \right) \right)^n.$$

2. Montrer que, quand  $n \rightarrow \infty$ ,

$$e^{-i\theta\sqrt{p_n/n}} \left( 1 + p_n \left( e^{i\theta/\sqrt{np_n}} - 1 \right) \right) = 1 - \frac{\theta^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

3. Conclure.