

TD 2 – Variables aléatoires, lois et espérance

1. Variables aléatoires

Exercice 1. Soient X, Y et Z des v.a. réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. On suppose que $X = Y$ p.s. Montrer que X et Y ont la même loi. Que dire de la réciproque ?
2. On suppose que X et Y ont la même loi.
 - (a) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.
 - (b) Montrer que les variables aléatoires XZ et YZ n'ont pas nécessairement la même loi.

Corrigé.

1. Si $X = Y$ p.s. alors, pour toute fonction mesurable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(X) = f(Y)$ p.s. et donc $\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[f(Y)]$ (car les intégrales par rapport à $\mathbb{P}$ de deux fonctions égales $\mathbb{P}$ -presque partout sont égales), ce qui montre que X et Y ont la même loi : en effet, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, en prenant $f = \mathbb{1}_B$, on a

$$P_X(B) = \mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[f(Y)] = P_Y(B).$$

La réciproque est fausse. Considérons une variable aléatoire X une v.a. à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$, i.e. de loi $\frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$. On pose $Y = -X$. Alors Y a la même loi que X , mais X et Y ne sont jamais égales (pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \neq Y(\omega)$).

- 2.(a) Pour toute fonction mesurable $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, la fonction $g \circ f$ est mesurable. Comme X et Y ont la même loi, on a

$$\mathbb{E}[g(f(X))] = \mathbb{E}[(g \circ f)(X)] = \mathbb{E}[(g \circ f)(Y)] = \mathbb{E}[g(f(Y))].$$

Comme c'est vrai pour toute fonction mesurable $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, cela montre que $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi (pour la même raison qu'en question 1.).

- (b) On reprend les variables X et Y de la question 1. Soit $Z = X$. Alors $XZ = X^2$ et $YZ = -X^2$. La loi de X^2 est δ_1 et la loi de $-X^2$ est δ_{-1} donc XZ et YZ n'ont pas la même loi.

2. Formule de transfert

Theorem (Théorème de transfert). Soit X une v.a. à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$. Soit $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable telle que $f \in L^1(E, \mathcal{E}, P_X)$ ou f positive. Alors

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_E f(x) dP_X(x).$$

Exercice 2. Soit X une v.a. de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, i.e. de loi $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \delta_k$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $\mathbb{E}[e^{-tX}]$.

Corrigé. La fonction $x \mapsto e^{-tx}$ est mesurable et positive donc on peut appliquer le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}[e^{-tX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{-tx} dP_X(x).$$

Par la formule pour l'intégrale contre une mesure discrète, on obtient

$$\mathbb{E}[e^{-tX}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-tk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{-t})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{-t}} = e^{\lambda(e^{-t}-1)}.$$

Remarque. En cours de probabilités discrètes, on aurait plutôt écrit :

$$\mathbb{E}[e^{-tX}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-tk} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-tk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},$$

ce qui revient au même heureusement !

Exercice 3. Soit X une v.a. réelle de densité $p_X : x \mapsto c(x\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + (2-x)\mathbb{1}_{[1,2]}(x))$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Déterminer la valeur de la constante c . Calculer $\mathbb{E}[X^p]$ pour tout $p \geq 0$.

Corrigé. On obtient c en utilisant que l'intégrale de p_X doit être égale à 1 : on a

$$\int_{\mathbb{R}} p_X(x) dx = c \left(\int_0^1 x dx + \int_1^2 (2-x) dx \right) = c \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = c$$

et donc $c = 1$.

Soit $p \geq 0$. Par le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^p] &= \int_{\mathbb{R}} x^p p_X(x) dx = \int_0^1 x^{p+1} dx + \int_1^2 (2x^p - x^{p+1}) dx \\ &= \left[\frac{x^{p+2}}{p+2} \right]_0^1 + \left[\frac{2x^{p+1}}{p+1} - \frac{x^{p+2}}{p+2} \right]_1^2 = \frac{1}{p+2} + \frac{2 \cdot 2^{p+1}}{p+1} - \frac{2^{p+2}}{p+2} - \frac{2}{p+1} + \frac{1}{p+2} \\ &= \frac{2^{p+2} - 2}{(p+1)(p+2)}. \end{aligned}$$

3. Calcul de loi

Méthode. Pour déterminer la loi d'une v.a. réelle Y , on pourra utiliser la méthode suivante, présentée plus en détails en Section 1.3.3 des notes de cours : considérer une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable quelconque et écrire $\mathbb{E}[f(Y)]$ sous la forme $\int_{\mathbb{R}} f(y) d\mu(y)$. Alors on peut en conclure que $P_Y = \mu$.

Exercice 4. Soit X une v.a. de loi gaussienne standard, i.e. de loi $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$.

1. Pour $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, on pose $Y = \sigma X + m$. Déterminer la loi de Y .
2. Montrer que $\mathbb{P}(X = 0) = 0$. On pose alors $Z = 1/X^2$ (qui est bien définie p.s.). Déterminer la loi de Z .

Corrigé.

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. On a, par théorème de transfert,

$$\mathbb{E}[f(Y)] = \mathbb{E}[f(\sigma X + m)] = \int_{\mathbb{R}} f(\sigma x + m) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{e^{-(y-m)^2/(2\sigma^2)}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dy,$$

avec le changement de variable $y = \sigma x + m$ (la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \sigma x + m \in \mathbb{R}$ est bien un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme). Donc, la loi de Y est

$$P_Y(dy) = \frac{e^{-(y-m)^2/(2\sigma^2)}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dy.$$

C'est en fait la loi gaussienne de moyenne m et de variance σ^2 !

2. On a $\mathbb{P}(X = 0) = P_X(\{0\}) = 0$ car P_X est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour déterminer la loi de Z , on utilise la méthode ci-dessus. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. On a, par théorème de transfert,

$$\mathbb{E}[f(Z)] = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{1}{X^2}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{1}{x^2}\right) e^{-x^2/2} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f\left(\frac{1}{x^2}\right) e^{-x^2/2} dx,$$

où l'on utilise la parité de la fonction intégrée dans la dernière égalité. Et $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^{-2} \in \mathbb{R}_+^*$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme, donc avec le changement de variables $z = x^{-2}$, on a

$$\mathbb{E}[f(Z)] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(z) e^{-1/(2z)} \frac{1}{2z^{3/2}} dz = \int_{\mathbb{R}} f(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi z^3}} e^{-1/(2z)} \mathbb{1}_{]0, \infty[}(z) dz.$$

Donc la loi de Z est

$$P_Z(dz) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z^3}} e^{-1/(2z)} \mathbb{1}_{]0, \infty[}(z) dz.$$

Exercice 5. Soit X une v.a. de loi exponentielle de paramètre 1, i.e. de loi $e^{-x} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x) dx$. On pose $Y = \min(X, \frac{1}{X})$ qui est bien définie p.s. car $\mathbb{P}(X = 0) = 0$. Déterminer la loi de Y .

Corrigé. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. On a, par théorème de transfert,

$$\mathbb{E}[f(Y)] = \mathbb{E}\left[f\left(\min\left(X, \frac{1}{X}\right)\right)\right] = \int_0^\infty f\left(\min\left(x, \frac{1}{x}\right)\right) e^{-x} dx$$

On sépare alors les cas $x \leq 1$ et $x > 1$:

$$\mathbb{E}[f(Y)] = \int_0^1 f(x) e^{-x} dx + \int_1^\infty f\left(\frac{1}{x}\right) e^{-x} dx = \int_0^1 f(x) e^{-x} dx + \int_0^1 f(y) e^{-1/y} \frac{1}{y^2} dy,$$

en utilisant le changement de variables $y = 1/x$ dans la 2ème intégrale. On a donc

$$\mathbb{E}[f(Y)] = \int_0^1 f(y) \left(e^{-y} + e^{-1/y} \frac{1}{y^2} \right) dy.$$

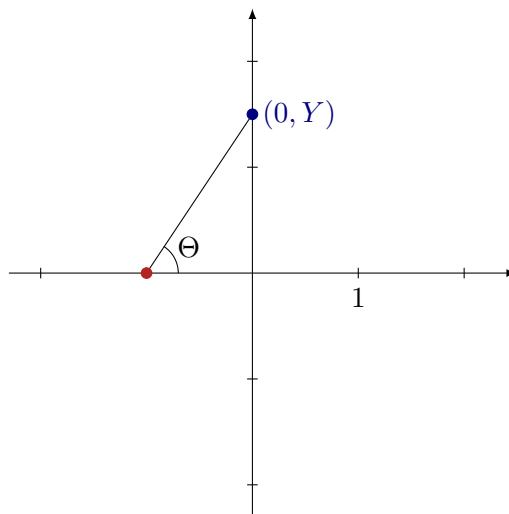
Donc la loi de Y est

$$P_Y(dy) = \left(e^{-y} + e^{-1/y} \frac{1}{y^2} \right) \mathbb{1}_{]0, 1[}(y) dy.$$

4. Modélisation continue

Exercice 6. On considère une source lumineuse ponctuelle située au point $(-1, 0)$ dans le plan. On suppose que la source émet un rayon lumineux en direction de l'axe des ordonnées en faisant un angle aléatoire Θ avec l'axe des abscisses, où Θ est tiré uniformément sur $] -\pi/2, \pi/2[$. Déterminer la loi de l'ordonnée du point d'impact du rayon avec l'axe des ordonnées.

Corrigé. On commence par faire un dessin.



Soit Θ une v.a. de loi uniforme sur $] -\pi/2, \pi/2[$, i.e. de loi $\frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{]-\pi/2, \pi/2[}(t) dt$. Le point d'impact du rayon lumineux sur l'axe des ordonnées est la v.a. $Y = \tan(\Theta)$. L'objectif est de déterminer la loi de Y . Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable. On a alors

$$\mathbb{E}[f(Y)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\tan(t)) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{dy}{1+y^2},$$

en utilisant le changement de variable $y = \tan(t)$ (car $t \in]-\pi/2, \pi/2[\mapsto \tan(t) \in \mathbb{R}$ est un C^1 -difféomorphisme). Donc la loi de Y est $\frac{1}{\pi(1+y^2)} dy$, i.e. la loi de Cauchy.

Exercice 7. (Paradoxe de Bertrand) On s'intéresse à la loi de la longueur d'une corde tirée "au hasard" sur un cercle de rayon 1. Dans chacun des cas suivants, formaliser et calculer cette loi puis en déduire la probabilité que la corde soit plus longue que $\sqrt{3}$, c'est-à-dire que la longueur d'un côté d'un triangle équilatéral inscrit.

1. On choisit les deux extrémités de la corde au hasard sur le cercle.
2. On choisit le centre de la corde au hasard sur le disque unité.
3. On choisit au hasard la direction du rayon orthogonal à la corde, puis le centre de la corde uniformément sur ce rayon.

Corrigé.

1. On identifie le cercle à $[0, 2\pi[$, donc on prend ici $\Omega := [0, 2\pi]^2$ muni de la tribu $\mathcal{A} := \mathcal{B}([0, 2\pi]^2)$ et de la mesure de probabilité $\mathbb{P}(d\omega) = \frac{1}{4\pi^2} d\theta d\theta'$, où on note $\omega = (\theta, \theta')$ pour $\omega \in \Omega$. La longueur de la corde est alors (faire un dessin)

$$X(\omega) = 2 \left| \sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) \right|.$$

Déterminons la loi de X . Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X)] &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(2 \left| \sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) \right|\right) \frac{1}{4\pi^2} d\theta d\theta' \\ &= \int_0^{2\pi} dv \int_{v-2\pi}^v du f\left(2 \left| \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right|\right) \frac{1}{4\pi^2} \end{aligned}$$

avec le changement de variable $\varphi: (\theta, \theta') \mapsto (\theta - \theta', \theta)$ de $]0, 2\pi]^2 \rightarrow \{(u, v) : v \in]0, 2\pi[, u \in]v - 2\pi, v]\}$ et de jacobien 1. Or, on a, par 2π -périodicité de $u \mapsto |\sin(u/2)|$,

$$\int_{v-2\pi}^v f\left(2 \left| \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right|\right) du = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(2 \left| \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right|\right) du = 2 \int_0^{\pi} f\left(2 \left| \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right|\right) du,$$

par parité de $u \mapsto |\sin(u/2)|$. On obtient donc

$$\mathbb{E}[f(X)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f\left(2 \sin\left(\frac{u}{2}\right)\right) du = \frac{1}{\pi} \int_0^2 f(x) \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{-1/2} dx,$$

avec le changement de variable $u = 2 \arcsin(x/2)$. La loi de X est donc

$$\frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{-1/2} \mathbb{1}_{x \in [0, 2]} dx.$$

On peut alors calculer

$$\mathbb{P}(X \geq \sqrt{3}) = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{-1/2} dx = \frac{2}{\pi} \left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) \right]_{\sqrt{3}}^2 = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{3}.$$

2. On prend à présent $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ le disque unité muni de la tribu $\mathcal{A} := \mathcal{B}(\Omega)$ et de la mesure de probabilité $\mathbb{P}(d\omega) = \frac{1}{\pi} dx dy$, où on note $\omega = (x, y)$ pour $\omega \in \Omega$. La corde n'est bien définie que pour $\omega \neq (0, 0)$ mais $\omega = (0, 0)$ arrive avec probabilité nulle (et dans ce cas on peut malgré tout définir la longueur de la corde comme étant 2). La longueur de la corde est (encore faire un dessin)

$$X(\omega) = 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Déterminons la loi de X . Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable. On a, avec un passage en coordonnées polaires,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X)] &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f\left(2\sqrt{1 - x^2 - y^2}\right) \mathbb{1}_{x^2 + y^2 \leq 1} dx dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f\left(2\sqrt{1 - r^2}\right) \mathbb{1}_{r^2 \leq 1} r dr d\theta \\ &= 2 \int_0^1 f\left(2\sqrt{1 - r^2}\right) r dr = \frac{1}{2} \int_0^2 f(u) u du, \end{aligned}$$

avec le changement de variable $u = 2\sqrt{1 - r^2}$ (pour lequel on a $r dr = \frac{u}{4} du$). La loi de X est donc

$$\frac{1}{2} x \mathbb{1}_{x \in [0, 2]} dx.$$

On peut alors calculer

$$\mathbb{P}(X \geq \sqrt{3}) = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_{\sqrt{3}}^2 = \frac{1}{4}.$$

3. On prend $\Omega := [0, 2\pi] \times [0, 1]$ muni de la tribu $\mathcal{A} := \mathcal{B}(\Omega)$ et de la mesure de probabilité $\mathbb{P}(d\omega) = \frac{1}{2\pi} d\theta dr$, où on note $\omega = (\theta, r)$ pour $\omega \in \Omega$. La longueur de la corde est (c'est une configuration analogue à la question 2.)

$$X(\omega) = 2\sqrt{1 - r^2}.$$

Déterminons la loi de X . Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X)] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f\left(2\sqrt{1 - r^2}\right) dr d\theta \\ &= \int_0^1 f\left(2\sqrt{1 - r^2}\right) dr \\ &= \int_0^2 f(u) \frac{u}{4} \left(1 - \frac{u^2}{4}\right)^{-1/2} du, \end{aligned}$$

avec le changement de variable $u = 2\sqrt{1 - r^2}$. La loi de X est donc

$$\frac{x}{4} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{-1/2} \mathbb{1}_{x \in [0, 2]} dx.$$

On peut alors calculer

$$\mathbb{P}(X \geq \sqrt{3}) = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{x}{4} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{-1/2} dx = \left[-\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{1/2} \right]_{\sqrt{3}}^2 = \frac{1}{2}.$$

5. Compléments

Exercice 8. Soient X et Y deux v.a. réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Supposons que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(Y < t \leq X) = 0$. Montrer que $\mathbb{P}(Y < X) = 0$.

2. Supposons maintenant que X et Y ont même loi. Montrer que, si $X \geq Y$ p.s., alors $X = Y$ p.s.
Indication. Considérer $\Omega' = \{X \geq Y\}$ et remarquer que

$$\mathbb{P}(\{X \geq t\} \setminus \{Y \geq t\}) = \mathbb{P}([\{X \geq t\} \cap \Omega'] \setminus [\{Y \geq t\} \cap \Omega']).$$

Corrigé.

1. Si $Y < X$, alors il existe un rationnel $q \in \mathbb{Q}$ tel que $Y < q \leq X$, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Donc, on a l'inclusion (c'est en fait une égalité!)

$$\{Y < X\} \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{Y < q \leq X\}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(Y < X) \leq \sum_{q \in \mathbb{Q}} \mathbb{P}(Y < q \leq X) = 0,$$

en utilisant l'hypothèse de l'énoncé. On a donc montré que $\mathbb{P}(Y < X) = 0$.

2. Supposons que X et Y ont même loi et que $X \geq Y$ p.s. Alors, avec $\Omega' = \{X \geq Y\}$, on a $\mathbb{P}(\Omega'^c) = 0$. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\{Y < t \leq X\} = \{X \geq t\} \setminus \{Y \geq t\}.$$

Puis on a l'union disjointe

$$\{X \geq t\} \setminus \{Y \geq t\} = (\{X \geq t\} \cap \Omega') \setminus [\{Y \geq t\} \cap \Omega'] \sqcup (\{X \geq t\} \cap \Omega'^c) \setminus [\{Y \geq t\} \cap \Omega'^c],$$

où le 2ème événement de cet union disjointe est inclus dans Ω'^c , donc a probabilité 0. On en déduit que

$$\mathbb{P}(Y < t \leq X) = \mathbb{P}([\{X \geq t\} \cap \Omega'] \setminus [\{Y \geq t\} \cap \Omega']).$$

Notons maintenant que $\{Y \geq t\} \cap \Omega' \subset \{X \geq t\} \cap \Omega'$, donc

$$\mathbb{P}(Y < t \leq X) = \mathbb{P}(\{X \geq t\} \cap \Omega') - \mathbb{P}(\{Y \geq t\} \cap \Omega').$$

Mais $\mathbb{P}(\{X \geq t\} \cap \Omega') = \mathbb{P}(X \geq t) - \mathbb{P}(\{X \geq t\} \cap \Omega'^c) = \mathbb{P}(X \geq t)$ car $\mathbb{P}(\Omega'^c) = 0$. En procédant de même avec $\mathbb{P}(\{Y \geq t\} \cap \Omega')$, on obtient

$$\mathbb{P}(Y < t \leq X) = \mathbb{P}(X \geq t) - \mathbb{P}(Y \geq t) = 0,$$

car X et Y ont la même loi. Par la question 1, on en déduit que $\mathbb{P}(Y < X) = 0$, c'est-à-dire $Y \geq X$ p.s. Mais comme on a aussi $X \geq Y$ p.s., on a donc montré que $X = Y$ p.s.

Exercice 9. (Transformation de loi discrète) Soit X une v.a. réelle de loi discrète $\sum_{i \in \mathcal{I}} p_i \delta_{x_i}$, avec $\mathcal{I} \subset \mathbb{N}$, $(p_i)_{i \in \mathcal{I}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathcal{I}}$ et $(x_i)_{i \in \mathcal{I}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. Quelle est la loi de $f(X)$?

Corrigé. On pose $Y = f(X)$.

Méthode 1. Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. On a, par théorème de transfert,

$$\mathbb{E}[g(Y)] = \mathbb{E}[g(f(X))] = \int_{\mathbb{R}} g(f(x)) dP_X(x) = \sum_{i \in \mathcal{I}} p_i g(f(x_i)) = \int_{\mathbb{R}} g(y) d\left(\sum_{i \in \mathcal{I}} p_i \delta_{f(x_i)}\right)(y),$$

en réécrivant la somme comme une intégrale par rapport à une autre mesure discrète. Cela montre que

$$P_Y = \sum_{i \in \mathcal{I}} p_i \delta_{f(x_i)}.$$

Méthode 2. La v.a. Y est à valeurs dans l'ensemble dénombrable $\{f(x_i), i \in \mathcal{I}\}$, donc sa loi est discrète et est caractérisée par sa valeur sur les singletons. On calcule donc, pour tout $i \in \mathcal{I}$,

$$\mathbb{P}(Y = f(x_i)) = \mathbb{P}(f(X) = f(x_i)) = \mathbb{P}(X \in \{x_j : j \in \mathcal{I}, f(x_j) = f(x_i)\}) = \sum_{j \in \mathcal{I} \text{ tq } f(x_j) = f(x_i)} p_j$$

et cela montre que

$$P_Y = \sum_{i \in \mathcal{I}} p_i \delta_{f(x_i)},$$

car ces mesures coïncident sur les singletons $\{f(x_i)\}$.

Exercice 10. (Quelques propriétés de la gaussienne)

1. On veut montrer que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$. Pour cela, calculer l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy$$

à l'aide d'un changement de variables polaire. En déduire la formule désirée.

2. Soit X une v.a. de loi gaussienne standard, i.e. de loi $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}[X^{2n}] = \frac{(2n)!}{2^n n!} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[X^{2n+1}] = 0.$$

3. Soit X une v.a. de loi gaussienne standard. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) e^{-x^2/2} \leq \mathbb{P}(X > x) \leq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Indication. On pourra vérifier que

$$\frac{1}{x} e^{-x^2/2} = \int_x^\infty e^{-t^2/2} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) e^{-x^2/2} = \int_x^\infty e^{-t^2/2} \left(1 - \frac{3}{t^4} \right) dt.$$

Exercice 11. Soit X une v.a. de loi de Cauchy, i.e. de loi $\frac{1}{\pi(1+x^2)} dx$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X = 0) = 0$ et $\mathbb{P}(X < 0) = \frac{1}{2}$.
2. On pose $Y = 1/X$ (qui est bien définie p.s.). Déterminer la loi de Y .
3. Que dire de $\mathbb{E}[Y]$?

Corrigé.

1. Comme X est une v.a. continue, on a $\mathbb{P}(X = 0) = 0$.
Comme sa densité est une fonction paire, on a forcément $\mathbb{P}(X < 0) = \frac{1}{2}$. Plus précisément,

$$\mathbb{P}(X < 0) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{2},$$

où pour la dernière égalité on n'a pas besoin de calculer l'intégrale : c'est l'intégrale de p_X sur $\mathbb{R}$ donc elle vaut 1.

2. On utilise la même méthode que précédemment dans le TD. Ici le changement de variable $y = 1/x$ est bien une bijection $x \in \mathbb{R}^* \mapsto 1/x \in \mathbb{R}^*$. On obtient que Y est aussi une loi de Cauchy !
3. On a $\mathbb{E}[|Y|] = \infty$ donc $\mathbb{E}[Y]$ n'est pas définie.

Exercice 12. Soit X une v.a. de loi exponentielle de paramètre 1, i.e. de loi $e^{-x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) dx$. Déterminer la loi de $\lfloor X \rfloor$ (la partie entière de X).

Corrigé. Soit $Y = \lfloor X \rfloor$. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Par le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}[f(Y)] = \mathbb{E}[f(\lfloor X \rfloor)] = \int_0^\infty f(\lfloor x \rfloor) e^{-x} dx = \sum_{k=0}^\infty \int_k^{k+1} f(k) e^{-x} dx = \sum_{k=0}^\infty (e^{-k} - e^{-(k+1)}) f(k).$$

On peut y reconnaître l'intégrale suivante

$$\mathbb{E}[f(Y)] = \int_{\mathbb{R}} f(y) d\left(\sum_{k=0}^\infty (e^{-k} - e^{-(k+1)}) \delta_k \right)(y)$$

et donc

$$P_Y = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-k} - e^{-(k+1)}) \delta_k.$$

Exercice 13. (Tribu engendrée par une variable aléatoire) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On note

$$\sigma(X) := \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

1. Montrer que $\sigma(X)$ est la plus petite tribu $\mathcal{A}$ sur Ω telle que X soit mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. La tribu $\sigma(X)$ est appelée la *tribu engendrée par la variable aléatoire X* .
2. Soit Y une v.a. qui soit $\sigma(X)$ -mesurable, i.e. Y est une application mesurable de $(\Omega, \sigma(X))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer qu'il existe une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable telle que $Y = f(X)$.
Indication. On commencera par le cas où $Y = \mathbb{1}_A$ avec $A \in \sigma(X)$, puis le cas où Y est étagée. Finalement, pour Y générale, on utilisera qu'elle est limite de v.a. $\sigma(X)$ -mesurables étagées.
3. Expliciter $\sigma(X)$ et la loi de X dans les cas suivants (λ est la mesure de Lebesgue) :
 - (a) $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) := ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ et $X(\omega) := 2\omega \mathbb{1}_{[0, 1/2]}(\omega) + \mathbb{1}_{[1/2, 1]}(\omega)$ pour $\omega \in [0, 1]$.
 - (b) $X := a \mathbb{1}_A + b \mathbb{1}_B$, où $A, B \in \mathcal{A}$ et $a, b \in \mathbb{R}^*$.
 - (c) $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) := ([-1, 1], \mathcal{B}([-1, 1]), \lambda/2)$ et $X(\omega) := \omega^2$ pour $\omega \in [0, 1]$.

Corrigé.

1. La famille $\sigma(X)$ est une tribu : c'est la tribu réciproque de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par X .
Il est clair que $\sigma(X)$ rend X mesurable (car pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a bien $X^{-1}(B) \in \sigma(X)$). D'autre part, toute tribu rendant X mesurable contient $\sigma(X)$, car elle doit contenir les ensembles de la forme $X^{-1}(B)$ pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Donc $\sigma(X)$ est bien la plus petite tribu sur Ω rendant X mesurable.
2. La fonction Y est mesurable de $(\Omega, \sigma(X))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, donc il existe $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions étagées (pour $\sigma(X)$) telles que $Y = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, Y_n est de la forme

$$Y_n = \sum_{i=1}^{k_n} c_{i,n} \mathbb{1}_{X^{-1}(B_{i,n})},$$

avec $c_{i,n} \in \mathbb{R}$ et $B_{i,n} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Alors, on remarque que $Y_n = f_n \circ X$, où l'on a posé

$$f_n := \sum_{i=1}^{k_n} c_{i,n} \mathbb{1}_{B_{i,n}},$$

qui est bien une fonction mesurable de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On pose alors

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) & \text{si la limite existe dans } \mathbb{R}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction f est mesurable car elle s'écrit

$$f(x) = \mathbb{1}_{-\infty < \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) < \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

et $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$ sont mesurables. En outre, pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$f_n(X(\omega)) = Y_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Y(\omega),$$

donc $Y = f \circ X$.

- 3.(a) Soit $A \in \mathcal{B}([0, 1])$. On a $A = X^{-1}(\frac{1}{2}A) \in \sigma(X)$, car $\frac{1}{2}A \subset [0, \frac{1}{2}]$. Donc $\mathcal{B}([0, 1]) \subset \sigma(X)$ et ainsi $\mathcal{B}([0, 1]) = \sigma(X)$ (l'inclusion réciproque revient exactement à dire que X est mesurable de $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$). La loi de X est $\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\delta_1$.

- (b) *Cas 1 : $a \neq b$ et $a+b \neq 0$.* Alors X peut prendre uniquement les 4 valeurs distinctes suivantes : 0, a , b et $a+b$. Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par $\mathcal{C} := \{\{0\}, \{a\}, \{b\}, \{a+b\}\} \cup \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0, a, b, a+b\})$, $\sigma(X)$ est engendrée par les images réciproques d'éléments de $\mathcal{C}$. Comme les éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0, a, b, a+b\})$ ont pour image réciproque $\emptyset$ et 0, a , b et $a+b$ ont pour images réciproques $A^c \cap B^c$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$ et $A \cap B$, on en déduit que

$$\sigma(X) = \{\emptyset, A, B, A^c, B^c, A \cap B, A \cup B, A^c \cap B, A^c \cup B, A \cap B^c, A \cup B^c, A^c \cap B^c, A \Delta B, (A \Delta B)^c, \Omega\},$$

où $A \Delta B := A \cup B \setminus A \cap B$ est la différence symétrique entre A et B ($\sigma(X)$ contient les 2^4 ensembles que l'on peut former à partir de la partition à 4 éléments : $A^c \cap B^c$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$ et $A \cap B$). La loi de X est

$$\mathbb{P}(A^c \cap B^c)\delta_0 + \mathbb{P}(A \cap B^c)\delta_a + \mathbb{P}(A^c \cap B)\delta_b + \mathbb{P}(A \cap B)\delta_{a+b}.$$

Cas 2 : $a = b$. Alors, on a $X = a1_{A \Delta B} + 2a1_{A \cap B}$. Comme précédemment, $\sigma(X)$ est engendrée par $A^c \cap B^c$, $A \Delta B$, $A \cap B$, donc on obtient

$$\sigma(X) = \{\emptyset, A^c \cap B^c, A \Delta B, A \cap B, A \cup B, A^c \cup B^c, (A \Delta B)^c, \Omega\}.$$

La loi de X est

$$\mathbb{P}(A^c \cap B^c)\delta_0 + \mathbb{P}(A \Delta B)\delta_a + \mathbb{P}(A \cap B)\delta_{2a}.$$

Cas 3 : $a+b = 0$. Alors, on a X ne peut prendre que les 3 valeurs suivantes : 0, a et $-a$, donc $\sigma(X)$ est engendrée par $(A \Delta B)^c$, $A \cap B^c$ et $A^c \cap B$, donc on obtient

$$\sigma(X) = \{\emptyset, (A \Delta B)^c, A \cap B^c, A^c \cap B, A \Delta B, A^c \cup B, A \cap B^b, \Omega\}.$$

La loi de X est

$$\mathbb{P}((A \Delta B)^c)\delta_0 + \mathbb{P}(A \cap B^c)\delta_a + \mathbb{P}(A^c \cap B)\delta_{-a}.$$

- (c) Pour $A \in \mathcal{B}([-1, 1])$, on a $X^{-1}(A) = A \cup (-A)$, donc

$$\sigma(X) = \{A \cup (-A) : A \in \mathcal{B}([-1, 1])\},$$

qui est aussi l'ensemble des boréliens de $[-1, 1]$ symétriques par rapport à 0. Pour $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurables, on a

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\Omega} f(X(\omega)) \, d\mathbb{P}(\omega) = \int_{-1}^1 f(\omega^2) \frac{d\omega}{2} = \int_0^1 f(\omega^2) \, d\omega = \int_0^1 f(x) \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

donc X a pour loi $(2\sqrt{x})^{-1} \mathbb{1}_{x \in [0, 1]} \, dx$.