

TD 2 – Variables aléatoires, lois et espérance

1. Variables aléatoires

Exercice 1. Soient X, Y et Z des v.a. réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. On suppose que $X = Y$ p.s. Montrer que X et Y ont la même loi. Que dire de la réciproque ?
2. On suppose que X et Y ont la même loi.
 - (a) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.
 - (b) Montrer que les variables aléatoires XZ et YZ n'ont pas nécessairement la même loi.

2. Formule de transfert

Exercice 2. Soit X une v.a. de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, i.e. de loi $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \delta_k$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $\mathbb{E}[e^{-tX}]$.

Exercice 3. Soit X une v.a. réelle de densité $p_X: x \mapsto c(x\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + (2-x)\mathbb{1}_{[1,2]}(x))$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Déterminer la valeur de la constante c . Calculer $\mathbb{E}[X^p]$ pour tout $p \geq 0$.

3. Calcul de loi

Méthode. Pour déterminer la loi d'une v.a. réelle Y , on pourra utiliser la méthode suivante, présentée plus en détails en Section 1.3.3 des notes de cours : considérer une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable quelconque et écrire $\mathbb{E}[f(Y)]$ sous la forme $\int_{\mathbb{R}} f(y) d\mu(y)$. Alors on peut en conclure que $P_Y = \mu$.

Exercice 4. Soit X une v.a. de loi gaussienne standard, i.e. de loi $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$.

1. Pour $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, on pose $Y = \sigma X + m$. Déterminer la loi de Y .
2. Montrer que $\mathbb{P}(X = 0) = 0$. On pose alors $Z = 1/X^2$ (qui est bien définie p.s.). Déterminer la loi de Z .

Exercice 5. Soit X une v.a. de loi exponentielle de paramètre 1, i.e. de loi $e^{-x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) dx$. On pose $Y = \min(X, \frac{1}{X})$ qui est bien définie p.s. car $\mathbb{P}(X = 0) = 0$. Déterminer la loi de Y .

4. Modélisation continue

Exercice 6. On considère une source lumineuse ponctuelle située au point $(-1, 0)$ dans le plan. On suppose que la source émet un rayon lumineux en direction de l'axe des ordonnées en faisant un angle aléatoire Θ avec l'axe des abscisses, où Θ est tiré uniformément sur $] -\pi/2, \pi/2[$. Déterminer la loi de l'ordonnée du point d'impact du rayon avec l'axe des ordonnées.

Exercice 7. (Paradoxe de Bertrand) On s'intéresse à la loi de la longueur d'une corde tirée "au hasard" sur un cercle de rayon 1. Dans chacun des cas suivants, formaliser et calculer cette loi puis en déduire la probabilité que la corde soit plus longue que $\sqrt{3}$, c'est-à-dire que la longueur d'un côté d'un triangle équilatéral inscrit.

1. On choisit les deux extrémités de la corde au hasard sur le cercle.
2. On choisit le centre de la corde au hasard sur le disque unité.
3. On choisit au hasard la direction du rayon orthogonal à la corde, puis le centre de la corde uniformément sur ce rayon.

5. Compléments

Exercice 8. Soient X et Y deux v.a. réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- Supposons que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(Y < t \leq X) = 0$. Montrer que $\mathbb{P}(Y < X) = 0$.
- Supposons maintenant que X et Y ont même loi. Montrer que, si $X \geq Y$ p.s., alors $X = Y$ p.s.
Indication. Considérer $\Omega' = \{X \geq Y\}$ et remarquer que

$$\mathbb{P}(\{X \geq t\} \setminus \{Y \geq t\}) = \mathbb{P}([\{X \geq t\} \cap \Omega'] \setminus [\{Y \geq t\} \cap \Omega']).$$

Exercice 9. (Transformation de loi discrète) Soit X une v.a. réelle de loi discrète $\sum_{i \in \mathcal{I}} p_i \delta_{x_i}$, avec $\mathcal{I} \subset \mathbb{N}$, $(p_i)_{i \in \mathcal{I}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathcal{I}}$ et $(x_i)_{i \in \mathcal{I}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. Quelle est la loi de $f(X)$?

Exercice 10. (Quelques propriétés de la gaussienne)

- On veut montrer que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$. Pour cela, calculer l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy$$

à l'aide d'un changement de variables polaire. En déduire la formule désirée.

- Soit X une v.a. de loi gaussienne standard, i.e. de loi $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}[X^{2n}] = \frac{(2n)!}{2^n n!} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[X^{2n+1}] = 0.$$

- Soit X une v.a. de loi gaussienne standard. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) e^{-x^2/2} \leq \mathbb{P}(X > x) \leq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Indication. On pourra vérifier que

$$\frac{1}{x} e^{-x^2/2} = \int_x^\infty e^{-t^2/2} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) e^{-x^2/2} = \int_x^\infty e^{-t^2/2} \left(1 - \frac{3}{t^4} \right) dt.$$

Exercice 11. Soit X une v.a. de loi de Cauchy, i.e. de loi $\frac{1}{\pi(1+x^2)} dx$.

- Montrer que $\mathbb{P}(X = 0) = 0$ et $\mathbb{P}(X < 0) = \frac{1}{2}$.
- On pose $Y = 1/X$ (qui est bien définie p.s.). Déterminer la loi de Y .
- Que dire de $\mathbb{E}[Y]$?

Exercice 12. Soit X une v.a. de loi exponentielle de paramètre 1, i.e. de loi $e^{-x} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x) dx$. Déterminer la loi de $\lfloor X \rfloor$ (la partie entière de X).

Exercice 13. (Tribu engendrée par une variable aléatoire) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On note

$$\sigma(X) := \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

- Montrer que $\sigma(X)$ est la plus petite tribu $\mathcal{A}$ sur Ω telle que X soit mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. La tribu $\sigma(X)$ est appelée la *tribu engendrée par la variable aléatoire* X .
- Soit Y une v.a. qui soit $\sigma(X)$ -mesurable, i.e. Y est une application mesurable de $(\Omega, \sigma(X))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer qu'il existe une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable telle que $Y = f(X)$.

Indication. On commencera par le cas où $Y = \mathbb{1}_A$ avec $A \in \sigma(X)$, puis le cas où Y est étagée. Finalement, pour Y générale, on utilisera qu'elle est limite de v.a. $\sigma(X)$ -mesurables étagées.

- Expliciter $\sigma(X)$ et la loi de X dans les cas suivants (λ est la mesure de Lebesgue) :
 - $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) := ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ et $X(\omega) := 2\omega \mathbb{1}_{[0, 1/2]}(\omega) + \mathbb{1}_{]1/2, 1]}(\omega)$ pour $\omega \in [0, 1]$.
 - $X := a\mathbb{1}_A + b\mathbb{1}_B$, où $A, B \in \mathcal{A}$ et $a, b \in \mathbb{R}^*$.
 - $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) := ([-1, 1], \mathcal{B}([-1, 1]), \lambda/2)$ et $X(\omega) := \omega^2$ pour $\omega \in [0, 1]$.