

TD 3 – Moments, fonction de répartition, fonction caractéristique

1. Moments

Exercice 1. (Moments de la loi exponentielle) Soit X une v.a. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, i.e. de loi $\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x) dx$. Calculer les moments de X .

Corrigé. Comme $X \geq 0$ les moments sont bien définis. Par le théorème de transfert, on a, pour $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_{\mathbb{R}} x^n dP_X(x) = \int_0^\infty x^n \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Si $n \geq 1$, en intégrant $\lambda e^{-\lambda x}$ par partie, on obtient

$$\mathbb{E}[X^n] = \left[x^n e^{-\lambda x} \right]_0^\infty + \int_0^\infty n x^{n-1} e^{-\lambda x} dx = 0 + \frac{n}{\lambda} \mathbb{E}[X^{n-1}].$$

Par récurrence, en initialisant avec $\mathbb{E}[X^0] = 1$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}[X^n] = \frac{n!}{\lambda^n}.$$

Exercice 2. (Moments et queue de distribution)

1. Soit X une v.a. positive et $p > 0$. Montrer que

$$\mathbb{E}[X^p] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x) p x^{p-1} dx = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq x) p x^{p-1} dx.$$

2. Soit X une v.a. de loi de Pareto de paramètres de forme $a > 0$ et de location $b > 0$, i.e. telle que $\mathbb{P}(X \geq x) = (b/x)^a$ pour tout $x \geq b$. Déterminer l'ensemble des $p > 0$ tels que $\mathbb{E}[X^p] < \infty$.

Corrigé.

1. Comme X^p est une v.a. positive, par le résultat vu en cours (Proposition 1.3.16),

$$\mathbb{E}[X^p] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X^p > x) x dx = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x^{1/p}) x dx.$$

On fait alors le changement de variable $y = x^{1/p}$ et on obtient

$$\mathbb{E}[X^p] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X^p > x) x dx = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > y) p y^{p-1} dy.$$

La formule avec $\mathbb{P}(X \geq y)$ s'obtient de la même manière à partir de l'autre formule vue en cours (toujours dans la Proposition 1.3.16).

2. Soit $p > 0$. Par la question 1, on a l'équivalence

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^p] < \infty &\Leftrightarrow \int_0^b 1 \cdot p x^{p-1} dx + \int_b^\infty \left(\frac{b}{x}\right)^a \cdot p x^{p-1} dx < \infty. \\ &\Leftrightarrow \int_b^\infty x^{p-1-a} dx < \infty \\ &\Leftrightarrow p < a. \end{aligned}$$

2. Fonction de répartition

Exercice 3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \frac{1}{4} \mathbb{1}_{[0,1[}(x) + \frac{x}{2} \mathbb{1}_{[1,2[}(x) + \mathbb{1}_{[2,+\infty[}(x)$.

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une unique mesure de probabilité P sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $P(\{1/2\})$, $P(\{1\})$, $P(\{2\})$, $P([1/2, 3/2])$.
3. Déterminer P .

Corrigé.

1. La fonction F est croissante, continue à droite, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ donc F est la fonction de répartition d'une mesure de probabilité P sur $\mathbb{R}$ (Théorème 1.4.4). Cette mesure est unique car la fonction de répartition caractérise la loi (Théorème 1.4.3).

2. On a

$$P(\{1/2\}) = P([-\infty, 1/2]) - P([-\infty, 1/2[) = F(1/2) - F(1/2-),$$

où $F(1/2-)$ désigne la limite à gauche de F en $1/2$ (bien définie car F croissante). En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$P([-\infty, x]) = P\left(\bigcup_{n \geq 1}]-\infty, x-1/n]\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow P([-\infty, x-1/n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow F(x-1/n) = F(x-).$$

On en déduit que $P(\{1/2\}) = 0$ car F est continue en $1/2$.

Similairement $P(\{1\}) = F(1) - F(1-) = 1/2 - 1/4 = 1/4$ et $P(\{2\}) = F(2) - F(2-) = 0$.
Finalement

$$P([1/2, 3/2]) = P([-\infty, 3/2]) - P([-\infty, 1/2]) = F(3/2-) - F(1/2) = 3/4 - 1/4 = 1/2.$$

3. La fonction F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$, donc par la Proposition 1.4.5, avec F' qui est définie Lebesgue-presque partout, on a

$$\begin{aligned} dP(x) &= F'(x) dx + (F(0) - F(0-)) d\delta_0(x) + (F(1) - F(1-)) d\delta_1(x) + (F(2) - F(2-)) d\delta_2(x) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[1,2[}(x) dx + \frac{1}{4} d\delta_0(x) + \frac{1}{4} d\delta_1(x). \end{aligned}$$

Exercice 4. Soit X une v.a. de loi exponentielle de paramètre 1. On pose $Y = \min(X, \frac{1}{X})$. Calculer la fonction de répartition de Y et en déduire la loi de Y .

Remarque. La loi de Y avait été calculée par une autre méthode dans l'exercice 6 du TD 2.

Corrigé. Rappelons que Y est définie p.s., on peut la définir partout en choisissant $Y = 0$ quand $X = 0$ (ça ne change pas sa loi). Remarquons alors que si $X \leq 1$, alors $Y = X$ et si $X > 1$, alors $Y = 1/X$. On a donc, pour $y \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}(Y \leq y, X \leq 1) + \mathbb{P}(Y \leq y, X > 1) \\ &= \mathbb{P}(X \leq y, X \leq 1) + \mathbb{P}(1/X \leq y, X > 1) \\ &= \mathbb{P}(X \leq y) + \mathbb{P}(X \geq 1/y) \\ &= \int_0^y e^{-x} dx + \int_{1/y}^{\infty} e^{-x} dx \\ &= 1 - e^{-y} + e^{-1/y}. \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{P}(Y \leq 0) = 0$ et $\mathbb{P}(Y > 1) = 0$, on en déduit que

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0, \\ 1 - e^{-y} + e^{-1/y} & \text{si } y \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } y > 1. \end{cases}$$

La fonction F_Y est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, donc par la Proposition 1.4.5, avec F' qui est définie Lebesgue-presque partout, on a

$$\begin{aligned} dP_Y(x) &= F'(x) dx + (F(0) - F(0-)) d\delta_0(x) + (F(1) - F(1-)) d\delta_1(x) \\ &= \left(e^{-x} + e^{-1/x} \frac{1}{x^2} \right) \mathbb{1}_{[0,1[}(x) dx. \end{aligned}$$

3. Fonction caractéristique

Exercice 5. (Régularité de la fonction caractéristique) Soit X une v.a. réelle.

1. Montrer que ϕ_X est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que le moment d'ordre n de X est fini. Montrer que ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \phi_X^{(k)}(\theta) = i^k \mathbb{E}[X^k e^{i\theta X}].$$

Indication. On pourra utiliser les résultats de continuité et dérivabilité d'intégrales à paramètre, rappelés en Section 1.3.2 des notes de cours.

Corrigé.

1. On veut appliquer le théorème de continuité sous l'intégrale (Théorème 1.3.6). Notons qu'il est énoncé pour une fonction à valeurs réelles mais il se généralise aisément aux fonctions à valeurs complexes en considérant les parties réelles et imaginaires. On vérifie les hypothèses :

- ▷ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\theta x}$ est mesurable ;
- ▷ presque sûrement, l'application $\theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\theta X}$ est continue sur $\mathbb{R}$;
- ▷ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $|e^{i\theta X}| \leq 1$ p.s. et $\mathbb{E}[1] < \infty$.

Donc la fonction $\phi_X : \theta \mapsto \mathbb{E}[e^{i\theta X}]$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrons par récurrence sur $n \geq 0$, la proposition P_n suivante : si le moment d'ordre n de X est fini, alors ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \phi_X^{(k)}(\theta) = \mathbb{E}[(iX)^k e^{i\theta X}].$$

L'initiation pour $n = 0$ a été faite en question 1, il faut donc prouver l'hérédité. Soit $n \geq 1$. Supposons que la P_{n-1} soit vraie et montrons P_n . Supposons que le moment d'ordre n de X est fini. Alors le moment d'ordre $n - 1$ de X est fini (cf Proposition 1.3.13), donc ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ et

$$\forall k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \phi_X^{(k)}(\theta) = \mathbb{E}[(iX)^k e^{i\theta X}].$$

On va montrer que $\phi_X^{(n-1)}$ est dérivable par le théorème de dérivabilité sous l'intégrale (Théorème 1.3.7). On vérifie les hypothèses

- ▷ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto (ix)^{n-1} e^{i\theta x}$ est mesurable ;
- ▷ presque sûrement, l'application $\theta \in \mathbb{R} \mapsto (iX)^{n-1} e^{i\theta X}$ est dérivable ;
- ▷ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $|\frac{\partial}{\partial \theta} (iX)^{n-1} e^{i\theta X}| = |(iX)^n e^{i\theta X}| \leq |X|^n$ et $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$ par hypothèse.

Donc la fonction $\phi_X^{(n-1)} : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}[(iX)^{n-1} e^{i\theta X}]$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\phi_X^{(n)}(\theta) = i^n \mathbb{E}[X^n e^{i\theta X}]$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Il reste à montrer que $\phi_X^{(n)}$ est continue. Pour cela on procède comme en question 1, avec la domination $|(iX)^n e^{i\theta X}| \leq |X|^n$.

Exercice 6. (Fonction caractéristique de la gaussienne)

1. Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, i.e. de loi $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$. Soit ϕ_X sa fonction caractéristique.

- (a) À l'aide de l'exercice 5 et d'une intégration par partie, montrer que $\phi'_X(\theta) = -\theta\phi_X(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
- (b) En déduire ϕ_X .
2. Soit $\sigma > 0$ et $m \in \mathbb{R}$. Soit Z une v.a. de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, i.e. de loi $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}dx$. Déterminer la fonction caractéristique de Z .
- Indication.* On a vu à l'exercice 5 du TD2 qu'on peut écrire $Z = \sigma X + m$ avec X de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Corrigé.

- 1.(a) La v.a. X a un moment d'ordre 1 fini donc par l'exercice 5, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\phi'_X(\theta) = \mathbb{E}[iX e^{i\theta X}] = \int_{\mathbb{R}} ix e^{i\theta x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx,$$

par le théorème de transfert. On intègre $x e^{-x^2/2}$ par parties, ce qui donne

$$\phi'_X(\theta) = -\left[ie^{i\theta x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} i^2 \theta e^{i\theta x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 0 - \theta \mathbb{E}[e^{i\theta X}] = -\theta \phi_X(\theta).$$

- (b) Les solutions de l'équation différentielle $\phi'_X(\theta) = -\theta\phi_X(\theta)$ sont de la forme $\phi_X(\theta) = C e^{-\theta^2/2}$ avec $C \in \mathbb{R}$ (obtenues en intégrant $\frac{\phi'_X}{\phi_X}(\theta) = -\theta$). En utilisant que $\phi_X(0) = \mathbb{E}[1] = 1$ on obtient $C = 1$. Donc

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \phi_X(\theta) = e^{-\theta^2/2}.$$

2. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\phi_Z(\theta) = \mathbb{E}[e^{i\theta Z}] = \mathbb{E}[e^{i\theta(\sigma X + m)}] = e^{i\theta m} \mathbb{E}[e^{i\theta \sigma X}] = e^{i\theta m} \phi_X(\sigma \theta) = e^{i\theta m - \sigma^2 \theta^2/2}.$$

4. Compléments

Exercice 7. Soit X une v.a. réelle et F_X sa fonction de répartition. Soit $a < b$. Exprimer en terme de F_X les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(X < a)$, $\mathbb{P}(X = a)$, $\mathbb{P}(X > a)$, $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$ et $\mathbb{P}(a < X < b)$.

Corrigé. On a vu à l'exercice 3 que

$$\mathbb{P}(X < a) = F_X(] - \infty, a[) = F_X(a-).$$

Puis $\mathbb{P}(X = a) = F_X(a) - F_X(a-)$, $\mathbb{P}(X > a) = 1 - F(a)$, $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a-)$ et $\mathbb{P}(a < X < b) = F(b-) - F(a)$.

Exercice 8. (Loi exponentielle et perte de mémoire)

- Soit X une v.a. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, i.e. de loi $\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x) dx$. Montrer que pour tout $s, t \geq 0$, $\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s)$. C'est la propriété de perte de mémoire.
- Soit X une v.a. positive telle que pour tout $s, t \geq 0$, $\mathbb{P}(X > t + s) = \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(X > s)$. Notons que, si $\mathbb{P}(X > t) > 0$, cela est équivalent à la propriété de perte de mémoire précédente. Supposons également que X n'est pas égale à 0 p.s. (i.e. $\mathbb{P}(X = 0) < 1$).
 - Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}(X > t) > 0$.
 - Montrer que X suit une loi exponentielle. Pour cela, on pourra utiliser le fait suivant (peut-être déjà vu en exercice en L1 ou L2) : si $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante telle que pour tous $s, t \geq 0$, $f(s + t) = f(s) + f(t)$, alors f est linéaire.

Corrigé.

1. Pour $t \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}(X > t) = \int_t^\infty p_X(x) dx = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda t}.$$

En particulier $\mathbb{P}(X > t) > 0$, donc on peut calculer, pour $s, t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > t + s, X > t)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{\mathbb{P}(X > t + s)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(X > s).$$

2.(a) Notons tout d'abord que $\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}(X \geq 0) - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) > 0$ car $\mathbb{P}(X = 0) < 1$. Mais, par continuité croissante de la mesure, on a

$$\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} \uparrow \{X > 1/n\}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \mathbb{P}(X > 1/n).$$

Donc on a nécessairement $\mathbb{P}(X > 1/n) > 0$ à partir d'un certain rang. On peut donc fixer $t_0 > 0$ tel que $\mathbb{P}(X > t_0) > 0$.

D'autre part, par une récurrence immédiate, on obtient que, pour tout $t \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X > kt) = \mathbb{P}(X > t)^k.$$

Donc en particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X > kt_0) > 0$.

Finalement, considérons $t \geq 0$. Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $kt_0 > t$. Alors

$$\mathbb{P}(X > t) \geq \mathbb{P}(X > kt_0) > 0.$$

(b) Pour $t \geq 0$, on pose $f(t) = -\log \mathbb{P}(X > t)$ (qui est bien définie grâce à la question précédente). Alors, pour $s, t \geq 0$,

$$\begin{aligned} f(t+s) &= -\log \mathbb{P}(X > t+s) = -\log[\mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(X > s)] \\ &= -\log \mathbb{P}(X > t) - \log \mathbb{P}(X > s) = f(t) + f(s). \end{aligned}$$

En outre, f est croissante car $t \mapsto \mathbb{P}(X > t)$ est décroissante. Donc, par le fait mentionné dans l'énoncé de la question, f est linéaire, c'est-à-dire il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) = \lambda t$ pour tout $t \geq 0$. On en déduit que $\mathbb{P}(X > t) = e^{-\lambda t}$ pour tout $t \geq 0$. Remarquons alors que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \downarrow \mathbb{P}(X > n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} \downarrow \{X < n\}\right) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0,$$

donc on a nécessairement $\lambda > 0$. Et notons que, pour $t < 0$, $\mathbb{P}(X > t) \geq \mathbb{P}(X > 0) = e^{-\lambda \cdot 0} = 1$ donc $\mathbb{P}(X > t) = 1$. On en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = 1 - \mathbb{P}(X > t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

C'est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ donc X suit la loi exponentielle de paramètre λ .

Exercice 9. (Fonction caractéristique de la loi de Cauchy) Rappelons que la loi de Cauchy (centrée) de paramètre $a > 0$ est la loi $\frac{a}{\pi(a^2 + x^2)} dx$ sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $a > 0$ et $f: x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-a|x|}$. Calculer sa transformée de Fourier $\hat{f}: \xi \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx$.
2. Soit X une v.a. de Cauchy de paramètre a . Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\phi_X(\xi) = e^{-a|\xi|}$.

Pour cela, on utilisera la formule d'inversion de Fourier : si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors, pour Lebesgue-presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi,$$

et l'égalité est vraie partout si et seulement si f est continue.

Corrigé.

1. Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-a|x|} e^{-i\xi x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{|x| \leq n} e^{-a|x|} e^{-i\xi x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n e^{-a|x|} e^{-i\xi x} dx,$$

où la 2ème égalité se justifie par convergence dominée (on domine $|\mathbb{1}_{|x| \leq n} e^{-a|x|} e^{-i\xi x}| \leq e^{-a|x|}$ qui est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$). Puis on a

$$\begin{aligned} \int_{-n}^n e^{-a|x|} e^{-i\xi x} dx &= \int_0^n e^{-ax} e^{-i\xi x} dx + \int_{-n}^0 e^{ax} e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1 - e^{-an} e^{-i\xi n}}{a + i\xi} + \frac{1 - e^{-an} e^{i\xi n}}{a - i\xi} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2a}{a^2 + \xi^2}, \end{aligned}$$

et donc

$$\hat{f}(\xi) = \frac{2a}{a^2 + \xi^2}.$$

2. Comme $\hat{f}$ est L^1 , on peut utiliser l'inversion de Fourier : pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \frac{2a}{a^2 + x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)} dx = \mathbb{E}[e^{i\xi X}] = \phi_X(\xi)$$

et donc $\phi_X(\xi) = e^{-a|\xi|}$.

Exercice 10. (Retour vers l'exponentielle) Soit X une v.a. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Calculer sa fonction caractéristique ϕ_X .
2. En développant ϕ_X en série entière en 0 et en utilisant que $\phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$ par l'exercice 5, obtenir les moments de X .

Corrigé.

1. On est censé trouver pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\phi_X(\theta) = \frac{\lambda}{\lambda - i\theta}.$$

2. Pour $|\theta| < \lambda$, on a le développement en série entière

$$\phi_X(\theta) = \frac{1}{1 - i\theta/\lambda} = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{i\theta}{\lambda} \right)^k,$$

ce qui implique en particulier

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \phi_X^{(k)}(0) = k! \cdot \left(\frac{i}{\lambda} \right)^k$$

D'autre part, X a tous ses moments finis (car $\int_0^\infty x^n \lambda e^{-\lambda x} dx < \infty$ pour tout $n \geq 0$), donc, par l'exercice 5, ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k].$$

On en conclut

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}[X^k] = \frac{k!}{\lambda^k}.$$

Exercice 11. Montrer qu'il existe une v.a. réelle X de fonction de répartition $F(t) = 1/(1+e^{-t})$, $t \in \mathbb{R}$. Déterminer la loi de X . On pose $X_1 = e^X$, $X_2 = X \mathbb{1}_{\{0 \leq X \leq 1\}}$ et $X_3 = \mathbb{1}_{\{0 \leq X \leq 1\}}$. Trouver les lois des X_i , $i = 1, 2, 3$.

Exercice 12. (Fonction caractéristique et moments, une réciproque) Soit X une v.a. réelle. Rappelons qu'on note ϕ_X sa fonction caractéristique.

- On suppose que ϕ_X est 2 fois dérivable en 0. L'objectif de cette question est de montrer que X a un moment d'ordre 2 fini.
 - En considérant $(\phi_X(t) + \phi_X(-t) - 2)/t^2$, montrer que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\frac{1 - \cos(tX)}{t^2} \right] = -\frac{1}{2} \phi_X''(0).$$

- En utilisant le lemme de Fatou, conclure.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que ϕ_X est $2k$ fois dérivable en 0. Montrer que X admet des moments finis jusqu'à l'ordre $2k$.

Corrigé.

- (a) La fonction ϕ_X étant deux fois dérivable en 0, la formule de Taylor-Young garantit un développement limité à l'ordre 2 :

$$\phi_X(t) = 1 + \phi_X'(0)t + \phi_X''(0)\frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

On en déduit que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_X(t) + \phi_X(-t) - 2}{t^2} = \phi_X''(0).$$

D'autre part, on remarque que

$$\frac{\phi_X(t) + \phi_X(-t) - 2}{t^2} = \frac{\mathbb{E}[e^{itX} + e^{-itX} - 2]}{t^2} = \mathbb{E} \left[\frac{2 \cos(tX) - 2}{t^2} \right] = -2 \mathbb{E} \left[\frac{1 - \cos(tX)}{t^2} \right],$$

donc on a montré que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\frac{1 - \cos(tX)}{t^2} \right] = -\frac{1}{2} \phi_X''(0).$$

- Comme $(1 - \cos(tX))/t^2 \geq 0$, on peut appliquer le lemme de Fatou, qui donne

$$\frac{1}{2} \mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E} \left[\liminf_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos(tX)}{t^2} \right) \right] \leq \liminf_{t \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\frac{1 - \cos(tX)}{t^2} \right] = -\frac{1}{2} \phi_X''(0) < \infty.$$

Donc X a un moment d'ordre 2 fini.

- Procédons par récurrence. L'initialisation est triviale pour $k = 0$ (toute v.a. à un moment d'ordre 0 fini).

Soit $k \in \mathbb{N}$. Admettons notre hypothèse de récurrence à l'ordre k : si ϕ_X est $2k$ fois dérivable en 0, alors X admet des moments jusqu'à l'ordre $2k$. Montrons là à l'ordre $k + 1$: supposons ϕ_X est $2k + 2$ fois dérivable en 0. Alors, on sait par hypothèse de récurrence que $\mathbb{E}[X^{2k}] < \infty$ et donc, par le théorème de régularité de la fonction caractéristique du cours (montré au TD 3), on sait que ϕ est $2k$ fois dérivable sur tout $\mathbb{R}$ et sa dérivée d'ordre $2k$ est

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_X^{(2k)}(t) = \mathbb{E}[(iX)^{2k} e^{itX}] = (-1)^k \mathbb{E}[X^{2k} e^{itX}].$$

On procède ensuite comme à la question 1, avec $\phi_X^{(2k)}$ à la place de ϕ_X . Comme $\phi_X^{(2k)}$ est 2 fois dérivable en 0, on a

$$\phi_X^{(2k)}(t) = \phi_X^{(2k)}(0) + \phi_X^{(2k+1)}(0)t + \phi_X^{(2k+2)}(0)\frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

On en déduit que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_X^{(2k)}(t) + \phi_X^{(2k)}(-t) - 2\phi_X^{(2k)}(0)}{t^2} = \phi_X^{(2k+2)}(0).$$

D'autre part, on remarque que

$$\frac{\phi_X^{(2k)}(t) + \phi_X^{(2k)}(-t) - 2\phi_X^{(2k)}(0)}{t^2} = -2\mathbb{E}\left[\frac{X^{2k}(1 - \cos(tX))}{t^2}\right],$$

donc on a montré que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbb{E}\left[\frac{X^{2k}(1 - \cos(tX))}{t^2}\right] = -\frac{1}{2}\phi_X^{(2k+2)}(0).$$

Comme $X^{2k}(1 - \cos(tX))/t^2 \geq 0$, on peut appliquer le lemme de Fatou, qui donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathbb{E}[X^{2k+2}] &= \mathbb{E}\left[\liminf_{t \rightarrow 0} \left(\frac{X^{2k}(1 - \cos(tX))}{t^2}\right)\right] \\ &\leq \liminf_{t \rightarrow 0} \mathbb{E}\left[\frac{X^{2k}(1 - \cos(tX))}{t^2}\right] \\ &= -\frac{1}{2}\phi_X^{(2k+2)}(0) < \infty. \end{aligned}$$

Donc X a un moment d'ordre $2k + 2$ fini.

Exercice 13. (Les moments ne caractérisent pas une loi de probabilité)

1. Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $Z = e^X$. Calculer la densité p_Z de Z .
Remarque. La loi de Z s'appelle loi log-normale.
2. Pour $a \in [-1, 1]$, soit $p_a(x) = p_Z(x)(1 + a \sin(2\pi \log x))$. Montrer que p_a est une densité de probabilité et que, si Z_a est une v.a. de densité p_a , alors les lois P_Z et P_{Z_a} sont distinctes (si $a \neq 0$).
3. Montrer que Z et Z_a admettent des moments de tous ordres et qu'ils sont tous égaux. Conclusion ?