

TD 3 – Moments, fonction de répartition, fonction caractéristique

1. Moments

Exercice 1. (Moments de la loi exponentielle) Soit X une v.a. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, i.e. de loi $\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x) dx$. Calculer les moments de X .

Exercice 2. (Moments et queue de distribution)

1. Soit X une v.a. positive et $p > 0$. Montrer que

$$\mathbb{E}[X^p] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x) p x^{p-1} dx = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq x) p x^{p-1} dx.$$

2. Soit X une v.a. de loi de Pareto de paramètres de forme $a > 0$ et de location $b > 0$, i.e. telle que $\mathbb{P}(X \geq x) = (b/x)^a$ pour tout $x \geq b$. Déterminer l'ensemble des $p > 0$ tels que $\mathbb{E}[X^p] < \infty$.

2. Fonction de répartition

Exercice 3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \frac{1}{4} \mathbb{1}_{[0, 1[}(x) + \frac{x}{2} \mathbb{1}_{[1, 2[}(x) + \mathbb{1}_{[2, +\infty[}(x)$.

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une unique mesure de probabilité P sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $P(\{1/2\})$, $P(\{1\})$, $P(\{2\})$, $P(]1/2, 3/2[)$.
3. Déterminer P .

Exercice 4. Soit X une v.a. de loi exponentielle de paramètre 1. On pose $Y = \min(X, \frac{1}{X})$. Calculer la fonction de répartition de Y et en déduire la loi de Y .

Remarque. La loi de Y avait été calculée par une autre méthode dans l'exercice 6 du TD 2.

3. Fonction caractéristique

Exercice 5. (Régularité de la fonction caractéristique) Soit X une v.a. réelle.

1. Montrer que ϕ_X est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que le moment d'ordre n de X est fini. Montrer que ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \phi_X^{(k)}(\theta) = i^k \mathbb{E}[X^k e^{i\theta X}].$$

Indication. On pourra utiliser les résultats de continuité et dérivabilité d'intégrales à paramètre, rappelés en Section 1.3.2 des notes de cours.

Exercice 6. (Fonction caractéristique de la gaussienne)

1. Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, i.e. de loi $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$. Soit ϕ_X sa fonction caractéristique.
 - (a) À l'aide de l'exercice 5 et d'une intégration par partie, montrer que $\phi_X'(\theta) = -\theta \phi_X(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
 - (b) En déduire ϕ_X .
2. Soit $\sigma > 0$ et $m \in \mathbb{R}$. Soit Z une v.a. de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, i.e. de loi $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)} dx$. Déterminer la fonction caractéristique de Z .

Indication. On a vu à l'exercice 5 du TD2 qu'on peut écrire $Z = \sigma X + m$ avec X de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

4. Compléments

Exercice 7. Soit X une v.a. réelle et F_X sa fonction de répartition. Soit $a < b$. Exprimer en terme de F_X les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(X < a)$, $\mathbb{P}(X = a)$, $\mathbb{P}(X > a)$, $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$ et $\mathbb{P}(a < X < b)$.

Exercice 8. (Loi exponentielle et perte de mémoire)

1. Soit X une v.a. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, i.e. de loi $\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x) dx$. Montrer que pour tout $s, t \geq 0$, $\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s)$. C'est la propriété de perte de mémoire.
2. Soit X une v.a. positive telle que pour tout $s, t \geq 0$, $\mathbb{P}(X > t + s) = \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(X > s)$. Notons que, si $\mathbb{P}(X > t) > 0$, cela est équivalent à la propriété de perte de mémoire précédente. Supposons également que X n'est pas égale à 0 p.s. (i.e. $\mathbb{P}(X = 0) < 1$).
 - (a) Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}(X > t) > 0$.
 - (b) Montrer que X suit une loi exponentielle. Pour cela, on pourra utiliser le fait suivant (peut-être déjà vu en exercice en L1 ou L2) : si $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante telle que pour tous $s, t \geq 0$, $f(s + t) = f(s) + f(t)$, alors f est linéaire.

Exercice 9. (Fonction caractéristique de la loi de Cauchy) Rappelons que la loi de Cauchy (centrée) de paramètre $a > 0$ est la loi $\frac{a}{\pi(a^2 + x^2)} dx$ sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $a > 0$ et $f: x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-a|x|}$. Calculer sa transformée de Fourier $\hat{f}: \xi \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx$.
2. Soit X une v.a. de Cauchy de paramètre a . Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\phi_X(\xi) = e^{-a|\xi|}$.
Pour cela, on utilisera la formule d'inversion de Fourier : si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors, pour Lebesgue-presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi,$$

et l'égalité est vraie partout si et seulement si f est continue.

Exercice 10. (Retour vers l'exponentielle) Soit X une v.a. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Calculer sa fonction caractéristique ϕ_X .
2. En développant ϕ_X en série entière en 0 et en utilisant que $\phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$ par l'exercice 5, obtenir les moments de X .

Exercice 11. Montrer qu'il existe une v.a. réelle X de fonction de répartition $F(t) = 1/(1+e^{-t})$, $t \in \mathbb{R}$. Déterminer la loi de X . On pose $X_1 = e^X$, $X_2 = X \mathbb{1}_{\{0 \leq X \leq 1\}}$ et $X_3 = \mathbb{1}_{\{0 \leq X \leq 1\}}$. Trouver les lois des X_i , $i = 1, 2, 3$.

Exercice 12. (Fonction caractéristique et moments, une réciproque) Soit X une v.a. réelle. Rappelons qu'on note ϕ_X sa fonction caractéristique.

1. On suppose que ϕ_X est 2 fois dérivable en 0. L'objectif de cette question est de montrer que X a un moment d'ordre 2 fini.
 - (a) En considérant $(\phi_X(t) + \phi_X(-t) - 2)/t^2$, montrer que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\frac{1 - \cos(tX)}{t^2} \right] = -\frac{1}{2} \phi_X''(0).$$

- (b) En utilisant le lemme de Fatou, conclure.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que ϕ_X est $2k$ fois dérivable en 0. Montrer que X admet des moments finis jusqu'à l'ordre $2k$.

Exercice 13. (Les moments ne caractérisent pas une loi de probabilité)

1. Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $Z = e^X$. Calculer la densité p_Z de Z .
Remarque. La loi de Z s'appelle loi log-normale.
2. Pour $a \in [-1, 1]$, soit $p_a(x) = p_Z(x)(1 + a \sin(2\pi \log x))$. Montrer que p_a est une densité de probabilité et que, si Z_a est une v.a. de densité p_a , alors les lois P_Z et P_{Z_a} sont distinctes (si $a \neq 0$).
3. Montrer que Z et Z_a admettent des moments de tous ordres et qu'ils sont tous égaux. Conclusion ?