

TD 4 – Vecteurs aléatoires et indépendance

1. Vecteurs aléatoires, loi jointe, lois marginales

Exercice 1. Soit (X, Y) une v.a. de loi $\mathbb{1}_{[0,1]^2}(x, y) dx dy$. Déterminer la loi de $(XY, X/Y)$.

Remarque. On peut voir (X, Y) comme un point tiré uniformément sur le carré $[0, 1]^2$, mais aussi X et Y comme des v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 2. On tire un point (X, Y) uniformément au hasard dans le disque unité de $\mathbb{R}^2$.

1. Quelle est la loi jointe de (X, Y) ?
2. Déterminer les lois marginales de (X, Y) .
3. Soit S la surface du disque centré en $(0, 0)$ et dont (X, Y) est sur le bord. Déterminer la loi de S .

Exercice 3. (Variables aléatoires entièrement corrélées) Soit $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que $\sigma_X = 0$ si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $X = a$ p.s.
2. Posons $Z = \sigma_X^2 Y - \text{Cov}(X, Y)X$. Montrer que $\sigma_Z^2 = \sigma_X^2(\sigma_X^2 \sigma_Y^2 - \text{Cov}(X, Y)^2)$.
3. En déduire que $|\text{Cov}(X, Y)| = \sigma_X \sigma_Y$ si et seulement si

$$\exists a, c \in \mathbb{R}, Y = cX + a \text{ p.s.} \quad \text{ou} \quad \exists a \in \mathbb{R}, X = a \text{ p.s.}$$

2. Indépendance

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) les événements $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants ;
- (ii) pour tous $C_1 \in \{A_1, A_1^c\}, \dots, C_n \in \{A_n, A_n^c\}$, les événements $C_1, \dots, C_n$ sont indépendants ;
- (iii) les variables aléatoires $\mathbb{1}_{A_1}, \dots, \mathbb{1}_{A_n}$ sont indépendantes.

Exercice 5. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

1. Soit $A \in \mathcal{A}$. Montrer que $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ si et seulement si, pour tout $B \in \mathcal{A}$, A et B sont indépendants.
2. Soit $A, B, C \in \mathcal{A}$. Supposons A, B, C indépendants. Montrer que A est indépendant de $B \cup C$ et de $B \setminus C$.

Exercice 6. Considérons l'expérience consistant à lancer deux dés à 6 faces équilibrés. Soit X la somme des dés, Y la différence absolue entre les dés, et $Z = \mathbb{1}_A$ où A est l'événement "le 1er dé donne un résultat pair".

1. Modéliser l'expérience et spécifier X, Y et Z dans ce cadre.
2. Pour chaque paire de v.a. parmi X, Y et Z , justifier si elles sont indépendantes ou non.

Indication. Pour montrer l'indépendance, on pourra utiliser que des v.a. discrètes X_1 et X_2 sont indépendantes ssi, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \mathbb{P}(X_1 = x_1)\mathbb{P}(X_2 = x_2)$. Ce résultat, déjà vu en probabilités discrètes, sera rappelé au prochain cours.

3. Compléments

Exercice 7. Soit (X, Y) une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On a vu en cours que si (X, Y) est continue alors X et Y sont continues. Que dire de la réciproque ?

Exercice 8. On tire trois élèves E_1 , E_2 et E_3 dans la promotion et on s'interroge sur leur date de naissance. On considère les événements

$$\begin{aligned}A &= "E_1 \text{ et } E_2 \text{ ont le même anniversaire}", \\B &= "E_1 \text{ et } E_3 \text{ ont le même anniversaire}", \\C &= "E_3 \text{ et } E_2 \text{ ont le même anniversaire}."$$

Modéliser l'expérience (on négligera les années bissextiles) et montrer que les événements A, B et C sont deux à deux indépendants mais pas indépendants dans leur ensemble.

Exercice 9. Soit (X, Y) une v.a. de loi $\mathbb{1}_{[0,1]^2}(x, y) dx dy$. Déterminer la loi de $(X + Y, XY)$.

Exercice 10. On considère $\Omega = [0, 1]$ muni de $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0, 1])$ et $\mathbb{P}$ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. Pour tout $n \geq 1$, on définit

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \left] \frac{2k-2}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n} \right].$$

Montrer que $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants. Qu'est-ce que cela signifie ?

Exercice 11. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, p_2, p_3 \in [0, 1]$ tels que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. On considère (X, Y) à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket^2$, de loi déterminée par

$$\forall i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j} \mathbb{1}_{i+j \leq n},$$

1. Que modélise (X, Y) ?
2. Déterminer les lois marginales de (X, Y) .

Exercice 12. Soit D le quart supérieur droit du disque unité de $\mathbb{R}^2$. Soit (X, Y) de loi $cxy \mathbb{1}_D(x, y) dx dy$, où c est une constante.

1. Déterminer c .
2. Déterminer les marginales de (X, Y) .
3. Soit (R, Θ) les coordonnées polaires de (X, Y) . Déterminer la loi de (R, Θ) .

Exercice 13. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit X une v.a. réelle.

1. Soit $A \in \mathcal{A}$. Montrer que si A et A sont indépendants alors $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.
2. Soit $\mathcal{C}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ telle que pour tout $C \in \mathcal{C}$, $\mathbb{P}(C) \in \{0, 1\}$. Montrer que si X est $\mathcal{C}$ -mesurable, alors X est constante p.s.

Indication. On pourra utiliser la fonction de répartition de X et considérer $x_0 := \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) = 1\}$.

3. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable et $Y = f(X)$. Montrer que si X et Y sont indépendantes, alors Y est constante p.s.

Indication. On pourra montrer que la tribu $\mathcal{C} = \sigma(Y)$ et la v.a. Y satisfont les hypothèses de la question 2. Rappelons du TD2 que $\sigma(Y) = \{Y^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ est la tribu engendrée par Y , qui est la plus petite tribu sur Ω rendant Y mesurable.