

TD 5 – Indépendance de variables aléatoires

1. Simulation de variables aléatoires

Exercice 1. (Simulation à partir d'un générateur uniforme) Soit P une loi continue sur $\mathbb{R}$ de densité p . Supposons qu'il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ tel que p soit strictement positive sur I et nulle en dehors de I .

1. Montrer que la fonction de répartition de P , notée F , est bijective de $I \rightarrow]0, 1[$.
2. Soit U une v.a. uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que $F^{-1}(U)$ a pour loi P .

Remarque. La fonction F^{-1} est appelée *fonction quantile* de la loi P . Elle peut être définie de manière générale pour toute loi sur $\mathbb{R}$ et la propriété de la question 2 reste vraie, voir la fin de la Section 1.4.1 des notes de cours.

Exercice 2. (Méthode de Box-Muller de simulation des gaussiennes)

1. Soit U une v.a. uniforme sur $[0, 1]$. Pour $\lambda > 0$, déterminer la loi de $-\frac{1}{\lambda} \ln U$.
2. Soit Θ une v.a. uniforme sur $[0, 2\pi]$ et Z une v.a. de loi exponentielle de paramètre $1/2$. On suppose que Z et Θ sont indépendantes. Déterminer la loi de $(\sqrt{Z} \cos \Theta, \sqrt{Z} \sin \Theta)$.
3. En déduire une méthode pour simuler deux v.a. indépendantes de loi gaussienne standard à partir de deux v.a. U_1 et U_2 indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.

2. Indépendance de variables aléatoires

Exercice 3. (Espérances successives) Supposons que X et Y sont indépendantes. Soit $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Montrer que $\mathbb{E}[F(X, Y)] = \mathbb{E}[g(Y)]$, où $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction définie par $g(y) = \mathbb{E}[F(X, y)]$ pour $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. (Indépendance de v.a. discrètes) Soit X et Y des v.a. à valeurs des ensembles finis ou dénombrables E et F . On suppose qu'il existe des suites $(p_x)_{x \in E}$ et $(q_y)_{y \in F}$ telles que

$$\forall x \in E, \quad \forall y \in F, \quad \mathbb{P}(X = x, Y = y) = p_x q_y.$$

1. Soit $c_X = \sum_{x \in E} p_x$ et $c_Y = \sum_{y \in F} q_y$. Montrer que $\mathbb{P}(X = x) = p_x / c_X$ pour tout $x \in E$, et $\mathbb{P}(Y = y) = q_y / c_Y$ pour tout $y \in F$.
2. En déduire que X et Y sont indépendantes.

Exercice 5. Soit X et Y des v.a. réelles. Pour chacune des lois jointes suivantes, déterminer si X et Y sont indépendantes. Si elles le sont, trouver leurs lois marginales.

1. $dP_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{24\pi} (2 + 6x^2 + y^2 + 3x^2 y^2) e^{-(x^2 + y^2)/2} dx dy$;
2. $dP_{(X,Y)}(x, y) = e^{-y} \mathbb{1}_{0 < x < y} dx dy$;
3. $P_{(X,Y)} = \sum_{k, \ell \in \mathbb{N}} \frac{1}{2} e^{-2} (e - 1)^3 (k + \ell) e^{-(k + \ell)} \delta_{(k, \ell)}$;
4. $P_{(X,Y)} = \sum_{k, \ell \in \mathbb{N}} \frac{1}{2} e^{-2} \frac{2^{k - \ell}}{k!} \delta_{(k, \ell)}$.

3. Compléments

Exercice 6. Deux personnes ont rendez-vous à 14h00 mais elles sont peu ponctuelles : les instants d'arrivées X et Y sont deux v.a. indépendantes uniformément réparties dans $[14, 15]$. Calculer la loi de la durée d'attente du premier.

Exercice 7. Trouver un exemple de v.a. réelles X, Y, Z où X est indépendante de Y , de Z mais pas de (Y, Z) .

Exercice 8. Soit μ et ν deux mesures de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Construire explicitement un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et deux v.a. réelles indépendantes X et Y telles que $P_X = \mu$ et $P_Y = \nu$.

Exercice 9. Soient X, Y, Z des v.a. réelles indépendantes de même loi.

1. Supposons que leur loi commune n'a pas d'atome. Calculer $\mathbb{P}(X < Y < Z)$.
2. Montrer que le résultat de la question précédente n'est plus forcément vrai si leur loi peut avoir un atome.

Exercice 10. Soit U et V deux v.a. indépendantes de loi uniforme sur $] -1/2, 1/2[$.

1. Calculer la loi de $X = U + V$.
2. Calculer la fonction caractéristique de X .

Exercice 11. (Fonction de répartition d'un vecteur aléatoire) Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Sa *fonction de répartition* est la fonction $F_X: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$\forall a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad F_X(a) = \mathbb{P}(X_1 \leq a_1, \dots, X_n \leq a_n).$$

1. Montrer que F_X caractérise la loi de X .
Rappel. La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ est engendrée par $\{] -\infty, a_1] \times \dots \times] -\infty, a_n] : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \}$.
2. Montrer que $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si, pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $F_X(a) = F_{X_1}(a_1) \cdots F_{X_n}(a_n)$.

Exercice 12. (Convolution de mesures finies) Soit μ, ν des mesures finies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. La *convolution* de μ et de ν , notée $\mu * \nu$, est la mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par : pour toute fonction mesurable positive f sur $\mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d(\mu * \nu) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x+y) \, d\mu(x) \, d\nu(y).$$

1. Montrer que $\mu * \nu$ est bien définie et que c'est une mesure finie, dont on explicitera la masse totale.
2. Soit μ, ν, ρ trois mesures finies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer les points suivants
 - (a) $\mu * \delta_0 = \mu$;
 - (b) $\mu * \nu = \nu * \mu$;
 - (c) $(\mu * \nu) * \rho = \mu * (\nu * \rho)$.
3. (Convolution et indépendance) Soit X et Y des v.a. réelles indépendantes. Montrer que la loi de $X + Y$ est $P_X * P_Y$.

Exercice 13. (Statistique d'ordre) Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne $X_1, \dots, X_n$ des v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Notons $\mathcal{S}_n$ le groupe des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Construire, à l'aide des événements $A_\sigma = \{X_{\sigma_1} < \dots < X_{\sigma_n}\}$ pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, n variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_n$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que, pour presque tout $\omega \in \Omega$,

$$Y_1(\omega) \leq \dots \leq Y_n(\omega) \quad \text{et} \quad \{Y_1(\omega), \dots, Y_n(\omega)\} = \{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\}.$$

2. Déterminer les lois des variables aléatoires $(Y_1, \dots, Y_n)$ et $(Y_1/Y_2, \dots, Y_{n-1}/Y_n)$.