

TD 6 – Encore de l'indépendance

1. Indépendances de variables aléatoires

Exercice 1. (Somme de v.a. gaussiennes) Rappelons que la fonction caractéristique de la loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est $\theta \in \mathbb{R} \mapsto \exp(im\theta - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2)$. Soit $X_1, \dots, X_n$ des v.a. indépendantes telles que $X_k \sim \mathcal{N}(m_k, \sigma_k^2)$. En calculant sa fonction caractéristique, déterminer la loi de $X_1 + \dots + X_n$.

Exercice 2. (Minimum de v.a. exponentielles)

1. Calculer la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
2. Soit $X_1, \dots, X_n$ des v.a. indépendantes de lois exponentielles de paramètres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Déterminer la loi de $\min(X_1, \dots, X_n)$.

2. Indépendances de suites

Définition.

- ▷ Soit $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$. On dit que $(A_k)_{k \geq 1}$ est une *suite d'événements indépendants* si, pour tout $n \geq 1$, $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants.
- ▷ Soit $X_1, X_2, \dots$ des v.a. On dit que $(X_k)_{k \geq 1}$ est une *suite de variables aléatoires indépendantes* si, pour tout $n \geq 1$, $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes.

Exercice 3. Soit $(A_k)_{k \geq 1}$ une suite d'événements indépendants. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right) = \prod_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n).$$

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Soit N une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire de loi $\sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \delta_k$. On suppose que N est indépendante de $(X_n)_{n \geq 1}$, i.e. pour tout $n \geq 1$, N et $(X_1, \dots, X_n)$ sont indépendants. On pose

$$P := \sum_{i=1}^N X_i \quad \text{et} \quad F := N - P = \sum_{i=1}^N (1 - X_i),$$

avec $P = F = 0$ sur $\{N = 0\}$. Les variables aléatoires P et F représentent respectivement le nombre de piles et de faces dans un jeu de pile ou face de paramètre p à N lancers.

1. Déterminer la loi du couple (P, N) .
2. En déduire la loi du couple (P, F) et en déduire que P et F sont indépendantes, ainsi que leurs lois marginales.

3. Compléments

Exercice 5. (Covariance et indépendance) Soit X et Y deux v.a. réelles.

1. Pour $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, montrer que $\text{Cov}(a_1X + a_2, b_1Y + b_2) = a_1b_1 \text{Cov}(X, Y)$.
2. Supposons que X et Y ne peuvent prendre chacune que deux valeurs distinctes. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Indication. On pourra montrer qu'il existe $a_1, b_1 \in \mathbb{R}^*$ et $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tels que $a_1X + a_2$ et $b_1Y + b_2$ sont à valeurs dans $\{0, 1\}$, puis vérifier que X et Y sont indépendantes ssi $a_1X + a_2$ et $b_1Y + b_2$ le sont.

3. Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que $\text{Cov}(X, X^2) = 0$. Qu'en conclure ?

Exercice 6. (C'est la faute du bus) Alice et Bob se sont donné rendez-vous. Alice est à l'heure mais Bob est en retard. Il est d'abord parti de chez lui avec X minutes de retard, puis son bus a eu Y minutes de retard, où l'on suppose que X et Y sont indépendantes de lois exponentielles de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Soit $T = X + Y$ le temps d'attente total pour Alice et $P = Y/(X + Y)$ la proportion de ce temps que Bob peut blâmer sur le bus.

1. Déterminer la loi de (T, P) .
2. En déduire la loi de P et calculer la probabilité que le bus soit responsable de plus de la moitié du retard.
3. Déterminer l'ensemble des $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que T et P sont indépendantes. Bien justifier l'indépendance et la non-indépendance.

Exercice 7. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N f(X_i)\right] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[f(X_1)],$$

où l'on adopte la convention qu'une somme vide est nulle.

Exercice 8. Soient U et $X = (X_1, \dots, X_n)$ deux v.a. indépendantes. On suppose que U est à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$ et que X est continue. On note $X_U(\omega) = X_{U(\omega)}(\omega)$.

1. Montrer que X_U est une v.a.
2. Montrer que X_U est continue et déterminer sa densité.
3. Supposons que les X_i ont même loi. Quelle est la loi de X_U ?

Exercice 9. (Construction d'une suite de v.a. de Bernoulli indépendantes) On considère $\Omega = [0, 1[$, muni de $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0, 1[)$ et de $\mathbb{P}$ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1[$. Pour $n \geq 1$ et $\omega \in [0, 1[$, on pose

$$X_n(\omega) = \lfloor 2^n \omega \rfloor - 2 \lfloor 2^{n-1} \omega \rfloor,$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière d'un nombre réel x .

- (a) Pour tous $n \geq 1$ et $\omega \in [0, 1[$, montrer que $X_n(\omega) \in \{0, 1\}$.
- (b) Montrer par récurrence que, pour tous $n \geq 1$ et $\omega \in [0, 1[$,

$$0 \leq \omega - \sum_{k=1}^n X_k(\omega) 2^{-k} < 2^{-n}.$$

- (c) En déduire que

$$\omega = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega) 2^{-k}.$$

On dit que les $X_k(\omega)$ sont les coefficients du développement dyadique propre de ω (i.e. l'unique développement dyadique de ω qui ne se termine pas par une infinité de 1).

- (a) Pour tout $n \geq 1$, montrer que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.
- (b) Montrer que $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.