

TD 8 – Retour sur les convergences L^p et p.s.

1. Convergence L^p

Rappel. Soit $p \in [1, \infty[$. Soit $X, X_1, X_2, \dots \in L^p$. On dit que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge dans L^p vers X , que l'on note

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} X,$$

si $\|X_n - X\|_p \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, où $\|X_n - X\|_p = \mathbb{E}[|X_n - X|^p]^{1/p}$.

Exercice 1. (Stabilité par opérations de la convergence L^p) Soit $p, q \in [1, \infty[$. Soit $X, X_1, X_2, \dots \in L^p$ et $Y, Y_1, Y_2, \dots \in L^q$. On suppose que

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} X \quad \text{et} \quad Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^q} Y.$$

1. Si $p = q$ et $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que $(aX_n + bY_n)_{n \geq 1}$ converge dans L^p vers $aX + bY$.
2. Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$, montrer que $(X_n Y_n)_{n \geq 1}$ converge dans L^r vers XY , avec r tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$.
3. Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne, montrer que $(f(X_n))_{n \geq 1}$ converge dans L^p vers $f(X)$.

Exercice 2. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $v > 0$. Soit $X_1, X_2, \dots \in L^2$ des v.a. indépendantes de même moyenne m et de variance majorée par v . Montrer que

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} m.$$

2. Convergence p.s.

Exercice 3. On considère une suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ de v.a. réelles positives.

1. Montrer que, si pour chaque $k \geq 1$, on a p.s. $Y_k \leq 1/k^2$, alors $\sum_{k \geq 1} Y_k$ converge p.s.
2. Pour $m \geq 1$ et $n \geq 0$, on définit $A_{m,n} = \{Y_1 + \dots + Y_m \geq n\}$. Parmi les événements

$$\bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq 0} A_{m,n}, \quad \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{m \geq 1} A_{m,n}, \quad \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq 0} A_{m,n}, \quad \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{m \geq 1} A_{m,n},$$

lequel correspond à l'événement $\{\sum_{k \geq 1} Y_k \text{ diverge}\}$? À quoi correspondent les trois autres?

3. Montrer que si $\sum_{k \geq 1} Y_k$ diverge p.s., alors, pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}(Y_1 + \dots + Y_m \geq n) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 1.$$

3. Limites supérieures et inférieures

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelles. Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Établir une série d'inclusion entre les événements suivants

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{X_n > a\}, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \{X_n \geq a\}, \quad \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n > a \right\}, \quad \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n \geq a \right\}.$$

Pour chaque inclusion, trouver un exemple tel qu'elle soit stricte.

2. Montrer qu'aucune inclusion n'est vraie en général entre

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{X_n \leq a\} \quad \text{et} \quad \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n \leq a \right\}.$$

Que dire du cas avec des inégalités strictes ?

3. Reprendre la question 1. avec les événements

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \{X_n < a\}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \{X_n \leq a\}, \quad \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n < a \right\}, \quad \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n \leq a \right\}.$$

4. Compléments

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. positives convergeant p.s. vers X . Soit $p > 1$. Montrer que

$$X_n e^{-X_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} X e^{-X}.$$

Exercice 6. Soit X une v.a. réelle. Montrer que

$$\mathbb{E}[\min(|X|, n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[|X|].$$

Exercice 7. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites de réels.

1. Montrer une inégalité entre

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Trouver un exemple tel qu'elle soit stricte.

2. Que dire si l'on remplace la somme par la différence ?
3. Que dire si l'on remplace la somme par le produit ?

Exercice 8. On tire à pile ou face une infinité de fois. Pour $n \geq 1$, soit A_n l'événement "la n -ième pièce tombe sur face" et B_n l'événement "la n -ième et la $(n+1)$ -ième pièces donnent le même résultat". Écrire sous forme de limites inférieures ou supérieures de A_n ou B_n les événements suivants :

1. On obtient face une infinité de fois.
2. On obtient le même résultat à partir d'un certain rang.

Exercice 9. Dans chacun des cas suivants déterminer la limite inférieure et la limite supérieure de la suite (a_n) .

1. Pour $n \geq 0$, $a_n = (-1)^n$.
2. Pour $n \geq 0$, $a_{2n} = 3 + 2^{-n}$ et $a_{2n+1} = (n+1)/n^2$.
3. Pour $n \geq 2$, a_n est le plus petit diviseur premier de n .

Exercice 10. Reprendre les exercices du TD1 sur les limites supérieures et inférieures d'ensembles.

Exercice 11. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $v > 0$. Soit $X_1, X_2, \dots \in L^2$ des v.a. de même moyenne m et de variance majorée par v . Contrairement à l'Exercice 2, on ne suppose pas les v.a. X_k indépendantes, mais seulement que leurs covariances tendent vers 0 quand leurs indices s'éloignent : plus précisément, on suppose qu'il existe une fonction $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$ et

$$\forall k, \ell \geq 1, \quad |\text{Cov}(X_k, X_\ell)| \leq h(|k - \ell|).$$

Montrer que

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} m.$$