

TD 9 – Convergence de variables aléatoires

1. Convergence dans L^p

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelles convergeant p.s. vers une v.a. réelle X . Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée. Montrer que, pour tout $p \in [1, \infty[$,

$$f(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} f(X).$$

Exercice 2. Soit $X \in L^1$. Montrer que $(n \sin(X/n))_{n \geq 1}$ converge dans L^1 vers une limite à identifier.

2. Convergence en probabilité

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. Montrer que

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Exercice 4. (Stabilité par opérations de la convergence en probabilité, partie 1) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ des suites de v.a. réelles convergeant en probabilité vers X et Y respectivement.

1.(a) Montrer que

$$X_n + Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} X + Y.$$

(b) En déduire que

$$X_n - Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} X - Y.$$

2. On veut montrer la stabilité par produit.

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que

$$\mathbb{P}(|X_n Y_n - XY| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}\left(|X_n - X| \cdot |Y_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|X| \cdot |Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

(b) Soit $\delta > 0$. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $\mathbb{P}(|X| \geq M) \leq \delta$ et $\mathbb{P}(|Y| \geq M) \leq \delta$.

(c) Avec δ et M considérés à la question précédente, montrer que, pour n suffisamment grand, $\mathbb{P}(|Y_n| \geq M + 1) \leq 2\delta$.

(d) En déduire que

$$X_n Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} XY.$$

3. On mélange les notions

Exercice 5. Soit $(p_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels dans $[0, 1]$. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes à valeurs dans $\{0, 1\}$ telles que, pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p_n$.

1. Soit $q \geq 1$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ pour que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge dans L^q vers 0.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ pour que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers 0.
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ pour que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge p.s. vers 0.

4. Compléments

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelles convergeant en probabilité vers une v.a. réelle X . On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $|X| \leq M$ p.s. et, pour tout $n \geq 1$, $|X_n| \leq M$ p.s. Montrer que, pour tout $p \in [1, \infty[$,

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} X.$$

Exercice 7. Soit X une v.a. positive. Identifier les limites de $\mathbb{E}[e^{-nX}]$ et $\mathbb{E}[e^{nX}]$ quand $n \rightarrow \infty$.

Exercice 8. (Stabilité par opérations de la convergence en probabilité, partie 2) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ des suites de v.a. réelles convergeant en probabilité vers X et Y respectivement.

1. Supposons $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$. On veut montrer la stabilité par quotient.

(a) Soit $\delta > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\mathbb{P}(|Y| \leq \eta) \leq \delta$.

(b) Avec δ et η considérés à la question précédente, montrer que, pour n suffisamment grand, $\mathbb{P}(|Y_n| \leq \eta/2) \leq 2\delta$.

(c) En déduire que

$$\frac{1}{Y_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \frac{1}{Y}.$$

(d) Conclure que

$$\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \frac{X}{Y}.$$

2. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue. En utilisant les questions 2.(b) et 2.(c) de l'exercice 4, ainsi que le fait qu'une fonction continue sur un compact est uniformément continue, montrer que

$$f(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} f(X).$$

Exercice 9. Soit $(p_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels dans $[0, 1]$. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes telle que X_n ait loi binomiale de paramètre (n, p_n) .

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ pour que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge dans L^1 vers 0.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ pour que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers 0.
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ pour que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge p.s. vers 0.

Exercice 10. (Métrisabilité de la convergence en probabilité) On note $L^0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, abrégé en L^0 , l'espace des v.a. réelles quotienté par la relation d'équivalence "être égal p.s." Pour X et Y des variables aléatoires réelles, on définit

$$d(X, Y) := \mathbb{E}[\min(1, |X - Y|)].$$

1. Montrer que d est une distance sur L^0 .

2. Montrer que d métrise la convergence en probabilité, c'est-à-dire que, pour $X, X_1, X_2, \dots \in L^0$,

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} X \iff d(X_n, X) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

3. En utilisant cette nouvelle caractérisation de la convergence en probabilité, montrer de nouveau que les convergences p.s. et L^1 impliquent la convergence en probabilité.

Exercice 11. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On suppose que Ω est dénombrable et que $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que les convergences "presque-sûre" et "en probabilité" sont équivalentes pour des v.a. réelles définies sur cet espace.