

Feuille de TD n°1

Math3-Num2 — Méthodes numériques : LU, systèmes, EDO

Exercice 1 – Exemple de perturbation. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad Y_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 10.1 \\ 6.9 \end{pmatrix}.$$

Résoudre les équations $AX_1 = Y_1$ et $AX_2 = Y_2$.

Exercice 2 – Normes de l'Identité. Soit Id la matrice "Identité" de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Montrer que pour toute norme subordonnée on a $\|Id\| = 1$ et que pour toute norme matricielle on a $\|Id\| \geq 1$.

Exercice 3 – Normes matricielles subordonnées. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in \{1, \dots, N\}} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

1) On munit $\mathbb{R}^N$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ de la norme induite correspondante, notée aussi $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que

$$\|A\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, N\}} \sum_{j=1}^N |a_{i,j}|.$$

2) On munit $\mathbb{R}^N$ de la norme $\|\cdot\|_1$ et $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ de la norme induite correspondante, notée aussi $\|\cdot\|_1$. Montrer que

$$\|A\|_1 = \max_{j \in \{1, \dots, N\}} \sum_{i=1}^N |a_{i,j}|.$$

3) On munit $\mathbb{R}^N$ de la norme $\|\cdot\|_2$ et $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ de la norme induite correspondante, notée aussi $\|\cdot\|_2$. Montrer que

$$\|A\|_2 = (\rho(A^T A))^{\frac{1}{2}}.$$

4) Montrer que, pour tout $v \in \mathbb{R}^N$, on a pour tout $p \geq 1$

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_p \leq N^{1/p} \|v\|_\infty,$$

et en déduire que $\lim_{p \rightarrow \infty} \|v\|_p \rightarrow \|v\|_\infty$.

5) Montrer que, pour tout $v \in \mathbb{R}^N$, on a pour tout $1 \leq p \leq q < \infty$, on a

$$\|v\|_q \leq \|v\|_p \leq N^{1/p-1/q} \|v\|_q.$$

6) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ inversible, on a

$$\frac{1}{N} \text{cond}_2(A) \leq \text{cond}_1(A) \leq N \text{cond}_2(A),$$

$$\frac{1}{N} \text{cond}_\infty(A) \leq \text{cond}_2(A) \leq N \text{cond}_\infty(A),$$

$$\frac{1}{N^2} \text{cond}_1(A) \leq \text{cond}_\infty(A) \leq N^2 \text{cond}_1(A).$$

Exercice 4 – Propriétés générales du conditionnement I. On munit $\mathbb{R}^N$ d'une norme, notée $\|\cdot\|$, et $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ de la norme induite, notée aussi $\|\cdot\|$. Pour une matrice inversible $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, on note $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que $\text{cond}(A) \geq 1$.
2. Montrer que $\text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
3. Soit $A, B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ deux matrices inversibles. Montrer que $\text{cond}(AB) \leq \text{cond}(A) \text{cond}(B)$.

Exercice 5 – Propriétés générales du conditionnement II. On suppose que $\mathbb{R}^N$ est muni de la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ et $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ de la norme induite, notée aussi $\|\cdot\|_2$. On note alors $\text{cond}_2(A)$ conditionnement d’une matrice A inversible.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On note σ_N [resp. σ_1] la plus grande [resp. petite] valeur propre de $A^t A$ (noter que $A^t A$ est une matrice symétrique définie positive). Montrer que $\text{cond}_2(A) = \sqrt{\sigma_N/\sigma_1}$.
2. On suppose maintenant que A est symétrique définie positive, montrer que $\text{cond}_2(A) = \lambda_N/\lambda_1$ où λ_N [resp. λ_1] est la plus grande [resp. petite] valeur propre de A .
3. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que $\text{cond}_2(A) = 1$ si et seulement si $A = \alpha Q$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et Q est une matrice orthogonale (c’est-à-dire $Q^t = Q^{-1}$).
4. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On suppose que $A = QR$ où Q est une matrice orthogonale. Montrer que $\text{cond}_2(A) = \text{cond}_2(R)$.
5. Soit $A, B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques définies positives. Montrer que

$$\text{cond}_2(A + B) \leq \max\{\text{cond}_2(A), \text{cond}_2(B)\}$$

Exercice 6 – Rayon spectral. On munit $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ d’une norme, notée $\|\cdot\|$. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\rho(A) < 1$ si et seulement si $A^k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$.
2. Montrer que si $\rho(A) < 1$ alors $\limsup_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} \leq 1$.
3. Montrer que $\liminf_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} < 1 \rightarrow \rho(A) < 1$.
4. Montrer que $\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$.
5. On suppose ici que $\|\cdot\|$ est une norme matricielle, déduire de la question précédente que $\rho(A) \leq \|A\|$.