

Feuille de TD n°2

Math3-Num2 — Méthodes numériques : LU, systèmes, EDO

Exercice 1 – Matrices triangulaires.

- 1) Montrez que le produit de deux matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures) est une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure). Montrez que le produit de deux matrices triangulaires n'est pas nécessairement une matrice triangulaire.
- 2) Montrez que l'inverse d'une matrice triangulaire inférieure inversible (resp. supérieure inversible) est une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure). Montrez également que les coefficients diagonaux de l'inverse d'une matrice triangulaire sont l'inverse des coefficients diagonaux de la matrice.
- 3) Soit $L^{(k)} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ une matrice vérifiant

$$L_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ \eta_i \in \mathbb{R} & \text{si } j = k \text{ et } i > k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrez que $L^{(k)}$ est inversible. Montrez que l'on a $(L^{(k)})^{-1} = 2I_d - L^{(k)}$.

Exercice 2 – Existence de la décomposition LU.

- 1) Soit A une matrice inversible de $\mathbb{R}^{d \times d}$. Pour $k \in \{1, \dots, d\}$, on note

$$A(1:k, 1:k) = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kk} \end{bmatrix}.$$

Montrez qu'il existe L triangulaire inférieure à diagonale unité et U triangulaire supérieure telles que $A = LU$ si et seulement si pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$, $\det(A(1:k, 1:k)) \neq 0$.

- 2) En déduire que la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ admet une décomposition LU que l'on calculera.