

Feuille de TD n°3

Math3-Num2 — Méthodes numériques : LU, systèmes, EDO

Exercice 1 – Série de Neumann.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|$ une norme matricielle. On rappelle le théorème du cours : soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n alors les quatre propositions suivantes sont équivalentes

- i) pour une norme quelconque, nous avons $\lim_{k \rightarrow \infty} \|B^k\| = 0$.
- ii) pour tout vecteur $v \in \mathbb{K}^n$, nous avons $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k v = 0$.
- iii) le rayon spectral de B vérifie $\rho(B) < 1$.
- iv) il existe une norme matricielle subordonnée (dont le choix dépend de B) telle que $\|B\| < 1$.

- 1) Montrer que si $\rho(A) < 1$ les matrices $Id - A$ et $Id + A$ sont inversibles.
- 2) Montrer que la série de terme général A^k converge vers $(Id - A)^{-1}$ si et seulement si $\rho(A) < 1$.

Exercice 2 – Méthodes de Jacobi et Gauss Seidel pour une matrice 3×3 .

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et le vecteur $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit x^0 un vecteur de $\mathbb{R}^3$ donné.

Méthode de Jacobi

- 1) Ecrire la méthode de Jacobi pour la résolution du système $Ax = b$, sous la forme $x^{k+1} = B_J x^k + c_J$.
- 2) Déterminer le noyau de B_J et en donner une base.
- 3) Calculer le rayon spectral de B_J et en déduire que la méthode de Jacobi converge.
- 4) Calculer x^1 et x^2 pour les choix suivants de x^0 :

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Méthode de Gauss-Seidel

- 6) Ecrire la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution du système $Ax = b$, sous la forme $x^{k+1} = B_{GS} x^k + c_{GS}$.
- 7) Déterminer le noyau de B_{GS} .
- 8) Calculer le rayon spectral de B_J et en déduire que la méthode de Jacobi converge.
- 9) Calculer x^1 et x^2 pour les choix suivants de x^0 :

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 – Non convergence de la méthode de Jacobi. Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Montrer que A est symétrique définie positive si et seulement si $-\frac{1}{2} < a < 1$.
- 2) Montrer que la méthode de Jacobi converge si et seulement si $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$.

Suggestions : considérer d'abord le cas $a = 0$. Pour $a \neq 0$, calculer les valeurs propres de A en cherchant les racines du polynôme caractéristique : vous pouvez introduire la variable μ telle que $1 - \lambda = a\mu$.