

Feuille de TD n°4

Math3-Num2 — Méthodes numériques : LU, systèmes, EDO

Exercice 1 – Résolution d’une équation par méthode de point fixe.

On souhaite résoudre l’équation non linéaire suivante en utilisant une méthode de point fixe :

$$f(x) = 0, \quad \text{avec} \quad f(x) = x - \frac{1}{5} \sin x - \frac{1}{2}$$

- 1) En étudiant les variations de f , montrer que l’équation $f(x) = 0$ a une unique solution que l’on notera \bar{x} .
- 2) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d’éléments de \mathbb{R} définie par

$$\begin{cases} x_{n+1} = \phi(x_n), \\ x_0 = \alpha \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \phi(x) = \frac{1}{5} \sin x + \frac{1}{2}$$

- a) Montrer que ϕ est contractante de rapport $1/5$.
- b) En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers \bar{x} et que l’on a la vitesse de convergence : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{1}{5^n} |x_0 - \bar{x}|.$$

Exercice 2 – Méthodes de point fixe d’ordre quelconque.

Soit $I = [a, b]$ un intervalle réel fermé non réduit à un point et $f : I \rightarrow I$ de classe C^1 telle que $\sup_{x \in I} |f'(x)| < 1$.

- 1) Montrer que f admet un unique point fixe $l \in I$.
- 2) Pour $u_0 \in I$, on définit la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - a) Montrer que la suite u converge vers l .
 - b) Dans cette question, on suppose de plus que f est de classe C^r avec $r \geq 2$ et que $f^{(k)}(l) = 0$ pour tout $k = 1, \dots, r-1$ et $f^{(r)}(l) \neq 0$. Montrer la convergence de u vers l et que cette convergence est d’ordre au moins r .

Exercice 3 – Calcul de racine cubique.

Nous souhaitons calculer les zéros de la fonction $f(x) = x^3 - 2$ en utilisant la méthode de point fixe $x_{k+1} = \phi(x_k)$ avec ϕ donnée par

$$\phi(x) = \frac{2 - x^3}{3x^2} + x.$$

Notons $\alpha = \sqrt[3]{2}$ la solution du problème.

- 1) Vérifier que $\phi(\alpha) = \alpha$ et montrer que lorsque $x_0 \in [1, 2]$, la méthode du point fixe es convergente.
- 2) Montrer qu’en définitive la méthode est d’ordre deux.

Exercice 4. On cherche à déterminer les points d’intersection d’un cercle avec une hyperbole. Plus précisément on cherche les solutions du système d’équations polynomiales suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ x^2 - y^2 = 1. \end{cases}$$

- 1) Calculer si il y en a la/les solution/s de ce problème.
- 2) Écrire l’itération de Newton pour la résolution de ce problème. Montrer qu’une telle suite est bien définie dès que sa donnée initiale $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ est telle que $x_0 \times y_0 \neq 0$ et qu’elle converge vers une solution calculée à la question précédente.

Exercice 5 – Applications aux systèmes.

Soit le système d'équations non linéaire suivant :

$$\begin{cases} -5x_1 + 2 \sin x_1 + 2 \cos x_2 = 0, \\ 2 \cos x_1 + 2 \sin x_2 - 5x_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Notons $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ une solution de ce système.

Méthode du point fixe

- 1) Montrer que ce système peut s'écrire sous la forme $\phi(\bar{x}) = \bar{x}$ où ϕ est strictement contractante pour la norme $\|\cdot\|_1$.
- 2) Vérifier que la solution \bar{x} est unique.
- 3) A partir de la fonction ϕ , construire une suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers \bar{x} et estimer la vitesse de convergence.

Méthode de Newton

- 1) Écrire une méthode de Newton pour le système (1).
- 2) La solution est-elle toujours bien définie ?