

# Feuille de TD n°5

## Math3-Num2 — Méthodes numériques : LU, systèmes, EDO

### Exercice 1 – Condition de Lipschitz et unicité.

1) Pour  $a \geq 0$ , on définit la fonction  $f_a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  par  $f_a(x) = x^a$ . Pour quelles valeurs de  $a$  la fonction  $f_a$  est-elle lipschitzienne sur les bornés? *Indication : il faut considérer trois cas ( $a = 0$ ,  $a \in ]0, 1[$  et  $a \geq 1$ ).*

2) On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f_a(y(t)) & t \in [0, +\infty[ \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, si  $f_a$  est localement lipschitzienne, alors le problème admet une unique solution. Calculer cette solution. Montrer que si  $f_a$  n'est pas localement lipschitzienne alors le problème admet au moins deux solutions.

### Exercice 2.

Reformuler les EDOs suivantes en un système d'EDOs d'ordre 1 :

1)

$$y''(t) + \alpha y'(t) + \sin(y(t)) = 0.$$

2)

$$y'''(t) + y''(t) + y'(t) + y(t) = 0.$$

### Exercice 3 – Le pendule.

On considère l'équation différentielle suivante, qui décrit le mouvement d'un pendule

$$\begin{cases} x''(t) + \sin x(t) = 0 & t \in [0, +\infty[ \\ x(0) = \xi \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

où  $\xi \in [0, 2\pi[$  est la position initiale du pendule.

1) Écrire le problème sous la forme d'un système différentielle d'ordre 1 autonome

$$X'(t) = F(X(t)) \quad \text{où} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

En déduire un résultat d'existence ('unicité?) des solutions de (1).

2) Déterminer les points d'équilibre de (1), *i.e.*  $\bar{X} \in \mathbb{R}^2$  tels que  $F(\bar{X}) = 0$ .

3) Supposons  $X(t) = \bar{X} + Y(t)$  où  $Y \in \mathbb{R}^2$  est solution de (1) avec  $Y(t)$  proche de zéro et  $\bar{X}$  est un des points d'équilibre trouvés à la question précédente. En utilisant la formule de Taylor-Young en  $\bar{X}$ , montrer que dans chaque cas  $Y(t)$  vérifie une équation différentielle linéaire. Calculer leur solution explicite.