Feuille de TD n°6

Math3-Num2 — Méthodes numériques : LU, systèmes, EDO

La méthode d'Euler

Exercice 1. Appliquer la méthode d'Euler explicite à

$$\begin{cases} x'(t) = 1 + t - x(t), & t > 0, \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

1) Calculer x_1, x_2, ... et en déduire une expression de x_n en fonction de $t_n = nh$.

2) Calculer l'erreur locale de troncature.

3) Expliquer pourquoi $x_n = x(t_n)$ où $x(t)$ est la solution de (1).

Exercice 2. On s'intéresse aux approximations de l'EDO

$$\begin{cases} x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = t^2, & t > 0, \\ x(0) = 1 \ , \ x'(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

1) Écrire le système (2) comme un système de premier ordre et déterminer la méthode d'Euler explicite pour calculer les approximations de $x(t_{n+1})$ et $x'(t_{n+1})$ en fonction de $x(t_n)$ et $x'(t_n)$.

2) En éliminant y, montrer que le système

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) - 2x(t), \\ y'(t) = t^2 - y(t) \end{cases} \tag{3}$$

possède la même solution $x(t)$ que (2) si $x(0) = 1$ et $y(0)$ est bien choisi. Quelle est cette valeur ?

3) Appliquer la méthode d'Euler explicite à (3) et donner les formules pour calculer les approximations de $x(t_{n+1})$ et $y(t_{n+1})$ en fonction des approximations de $x(t_n)$ et $y(t_n)$.

4) Montrer que les approximations de $x(t_2)$ produites par les méthodes de question 1) et 3) sont identiques si les méthodes utilisent le même paramètre de discrétisation h.

Les méthodes multipas

Exercice 3. La méthode multipas suivante est-elle consistante ? Est-elle zéro-stable ? Est-elle convergente ?

$$x_{n+2} - x_n = \frac{1}{4}h(3f_{n+1} - f_n) \tag{4}$$

Pour quelles valeurs de paramètres a et b les méthodes suivantes sont consistantes ?

1) $x_{n+2} - ax_{n+1} - 2x_n = hbf_n$,

2) $x_{n+2} + x_{n+1} + ax_n = h(f_{n+2} + bf_n)$.

Exercice 4. On considère la méthode multipas

$$x_{n+2} + \alpha_1 x_{n+1} - ax_n = h\beta_2 f_{n+2}. \tag{5}$$

1) Quel est l'ordre maximal atteint avec a qui reste un paramètre ?

2) Quel est l'ordre maximal général ?

3) Commenter la méthode BDF(2) — "Backward Differentiation Formula à deux pas" — donnée par

$$x_{n+2} - \frac{4}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n = \frac{2}{3}hf_{n+2}. \tag{6}$$

Exercice 5. Étudier zéro-stabilité des méthodes multipas

1) $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = -2hf_n$,

2) $3x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n = ahf_n$.

Y a-t-il des valeurs de a telles que 2) soit convergente ?

Exercice 6. On considère la méthode multipas

$$x_{n+1} = x_{n-2} + \frac{3}{4}h\left(f_{n+1} + f_n + f_{n-1} + f_{n-2}\right). \tag{7}$$

1) Combien de pas a-t-elle ?

2) Est-ce une méthode explicite ou implicite ?

3) Écrire le 1^{er} et 2^{nd} polynômes caractéristiques.

4) Étudier la consistance et la zéro-stabilité.

Stabilité

Exercice 7. On considère la méthode des trapèzes, le polynôme de stabilité associé et sa racine r_1

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}h(f_{n+1} - f_n) \ \ , \ \ p(r) = r - 1 - \frac{1}{2}\hat{h}(r+1) \ \ , \ \ r_1 = \frac{1 + \frac{1}{2}\hat{h}}{1 - \frac{1}{2}\hat{h}}. \tag{8}$$

En utilisant $\hat{h} = 2X + 2iY$ prouver que

$$|r_1|^2 - 1 = \frac{4X}{(1-X)^2 + Y^2} \tag{9}$$

et déduire que pour tout $\mathrm{Re}(\hat{h}) < 0$ on a $|r_1| < 0$. Qu'est-ce que on peut déduire sur l'intervalle de stabilité absolue de la méthode de trapèzes ?

Exercice 8. Déterminer l'intervalle de stabilité absolue de la méthode multipas

$$x_{n+2} - x_n = \frac{1}{2}h(f_{n+1} + 3f_n). \tag{10}$$

Exercice 9. Soit $a \in \mathbb{R}$ un paramètre pour la méthode multipas

$$x_{n+2} - 2ax_{n+1} + (2a-1)x_n = h\left(af_{n+2} + (2-3a)f_{n+1}\right). \tag{11}$$

1) Écrire le 1^{er} et 2^{nd} polynômes caractéristiques.

2) Étudier la consistance.

3) Étudier la zéro-stabilité.

4) Étudier la convergence.

5) Quels sont l'ordre et la constante d'erreur ?

6) Y a-t-il de schémas A_0-stable ?

7) Commenter sur la méthode BDF(2) — "Backward Differentiation Formula à deux pas" — donnée par

$$x_{n+2} - \frac{4}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n = \frac{2}{3}hf_{n+2}. \tag{12}$$

8) Le théorème de la seconde barrière de Dahlquist est-t-il respecté ?