Feuille de TP n°3

Math3-Num2 — Méthodes numériques : LU, systèmes, EDO

Intégration numérique, résolution d'équations non-linéaires

Exercice 1 – Intégration numérique. On cherche à comparer les différentes méthodes d'intégration numérique pour le calcul de l'intégrale suivante :

$$I(g, a, b) = \int_a^b g(x)dx,$$

pour différentes fonctions g telles que

$$g_1(x) = x^2, a_1 = 0, b_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad g_2(x) = \frac{5e^{2x}\cos(x)}{e^{\pi} - 2}, a_2 = 0, b_2 = \pi/2.$$

1) Rectangles à gauche

a) Construire une fonction `Rectg(g,a,b,n)` qui calcule une valeur approchée de l'intégrale de la fonction g sur l'intervalle $[a, b]$ découpé en n sous-intervalles, par la méthode des rectangles à gauche.

b) Pour g_1 et g_2, faire un graphique de l'erreur d'interpolation en échelle logarithme qui permet de retrouver que la méthode des rectangles à gauche est d'ordre 1.

2) Reprendre l'intégralité de la question précédente pour

a) la méthode des rectangles au point milieu,

b) la méthode des trapézes,

c) et la méthode de Simpson.

3) Tracer un graphe unique, pour chacune des deux fonctions tests, qui permet de comparer les ordres de convergence des 4 méthodes mentionnées ci-dessus.

Exercice 2 – Dichotomie *vs.* Newton. On souhaite comparer, pour la résolution de les équations non linéaire suivantes, la méthode de la dichotomie et la méthode de Newton :

$$f(x) = 0 \qquad \text{avec} \qquad f(x) = x - e^{-x}.$$

1) (*Méthode de la dichotomie*) Soit $[a_k, b_k]$ l'intervalle définie par la méthode de la dichotomie à l'itération k. Implémenter une fonction `dichotomie` qui prend en argument la fonction f, les bornes d'intervalle initiale initiale a, b, une tolérance `tol` et renvoie la valeur $m_k = \frac{a_k+b_k}{/}2$ pour le première intervalle $[a_k, b_k]$ telle que telle que $|b_k - a_k| < \texttt{tol}$ ainsi que l'indice k correspondant. Combien faut-il d'itérations de la méthode quand $\texttt{tol} = 10^{-5}$, 10^{-9}, 10^{-12} ? Quelle est valeur de $f(m_k)$

2) (*Méthode de Newton*) Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la méthode de Newton. Implémenter une fonction `Newton` qui prend en argument la fonction f, sa derivée f' la donnée initiale α, une tolérance `tol` et renvoie la première valeur y_k telle que $|f(y_k)| < \texttt{tol}$ (critère de résidu) ainsi que l'indice k correspondant. Tester votre méthode avec $\alpha = 1$ et $\alpha = 100$. Combien faut-il d'itérations de la méthode quand $\texttt{tol} = 10^{-5}$, 10^{-9}, 10^{-12} ? Comparer aux résultats de la question précédente.