Ana4—CC1—25/03/2026 (30 min)

Les documents, téléphones et objets connectés sont interdits. Tout étudiant qui sera surpris avec un tel objet, même éteint, sera présumé en situation de fraude et verra ses résultats à l'UE suspendus jusqu'à ce que la section disciplinaire, saisie en la matière se prononce sur une sanction.

La clarté et la rédaction compteront pour une part importante dans la notation. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre et la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ donnée par

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto n^\alpha x(1-x)^n \ .$$

1. Déterminer pour quelles valeurs de α la convergence est uniforme sur $[0,1]$.
2. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence est uniforme sur $[\delta, 1]$, où $\delta \in]0,1]$ est quelconque.

Exercice 2 On considére la série de fonction $U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ où les termes $(u_n)_{n\geq 0}$ sont donnés par

$$u_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \ , \quad x \mapsto (-1)^n \frac{e^{-nx}}{1+n} \ .$$

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. Justifier que $U \in C^0(\mathbb{R}_+)$.
2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum u_n^{(k)}$ converge sur $[\delta, +\infty[$, où $\delta > 0$ est quelconque. Justifier que $U \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$.

Question hors barème : En comparant les expressions de $U = \sum u_n$ et $U' = \sum u_n'$, montrer que

$$\forall x > 0 \ , \quad U'(x) = U(x) - \frac{1}{1+e^{-x}} \ .$$

En déduire que $U \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$.