Exercice 1

1. Montrons que f_n converge simplement vers 0, c'est-à-dire $f_n(x) \xrightarrow[n]{} 0$ pour tout $x \in [0,1]$:

   (i) Pour $x = 0, 1$: $f_n(x) = 0 \xrightarrow[n]{} 0$

   (ii) Sinon, $1-x \in]0,1[$ donc $f_n(x) = x \cdot n^\alpha (1-x)^n \xrightarrow[n]{} 0$ par croissances comparées.

   Puisque $f_n \geq 0$ est continue sur le compact $[0,1]$, elle atteint sa borne supérieure, c'est-à-dire qu'il existe $x_n \in [0,1]$ tel que
   $$\|f_n\|_\infty = f_n(x_n).$$
   On détermine ce point :
   $$f'(x) = n^\alpha (1-x)^{n-1}\left((1-x) - nx\right) = n^\alpha (1-(n+1)x)$$
   et donc le maximum de f est atteint en $x = \frac{1}{n+1}$, 0 ou 1.

   Puisque $f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = n^\alpha (n+1)^{-1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \geq f_n(0) = f_n(1) = 0$, on a
   $$\|f_n\|_\infty = n^\alpha (n+1)^{-1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

   Déterminons pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ a-t-on $\|f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
   $$\|f_n\|_\infty \sim n^{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} e^{-1} n^{\alpha-1}$$
   où on a utilisé $\left(1-\frac{1}{t}\right)^t = \exp\left(t \log\left(1-\frac{1}{t}\right)\right) = \exp(-1 + o(1)) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-1}$.

   On en déduit que $\|f_n\|_\infty \longrightarrow 0$ ssi $\alpha < 1$.

2. Pour $0 \leq x \leq 1-\delta$, on a $0 \leq f_n(x) \leq n^\alpha q^n$, où $q := 1-\delta \in [0,1[$
   ainsi $\|f_n\|_{\infty,[0,1-\delta]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ par croissances comparées, quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 :

1. La série est de la forme $\sum b_n \varepsilon_n$ avec $b_n = (-1)^n$ et
   $\varepsilon_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n}$, ainsi $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n$ et $\|\varepsilon_n\|_\infty = \frac{1}{1+n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,
   donc par le test de Dirichlet uniforme (ou des séries alternées)
   la série converge uniformément.
   Puisque chaque terme de la série est continue sur $\mathbb{R}_+$,
   alors $U \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$

2. Pour tout $k \geq 0$, on a $u_n^{(k)}(x) = (-1)^{n+k} \frac{n^k}{1+n} e^{-nx}$ et donc $\|u_n^{(k)}\|_{\infty,[\delta,\infty[} = e^{-\delta n} \frac{n^k}{1+n} \sim e^{-\delta n} n^{k-1}$ (bien que $\|u_n^{(k)}\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = \frac{n^k}{1+n}$).

Or, la série $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\delta n} \frac{n^k}{1+n}$ converge (croissances comparées + comparaison de séries / Cauchy / d'Alembert), donc $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement sur $[\delta, \infty[$. Puisque $u_n^{(k)} \in \mathcal{C}^0([\delta,\infty[)$, on en déduit que $U \in \mathcal{C}^k([\delta,\infty[)$ et $U^{(k)} = \sum_{n\geq 0} u_n^{(k)}$. Puisque $\delta > 0$ et $k \geq 0$ sont quelconques, on en conclut que $U \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$.

3. On a établi que $U'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+n} (-e^{-x})^n$, et donc pour $x > 0$

$$U'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{1+n}\right)(-e^{-x})^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{1+n} = -\frac{1}{1+e^{-x}} + U(x).$$

On a donc par la formule de Duhamel/variation de la constante

$$\forall x \geq 0, \quad U(x) = U(0)e^x - e^x \int_0^x \frac{e^{-y}}{1+e^{-y}} \, dy,$$

ainsi $U \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$ car $x \mapsto \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$.