Ana4—CC2—06/05/2026 (1h30)

Les documents, téléphones et objets connectés sont interdits. Tout étudiant qui sera surpris avec un tel objet, même éteint, sera présumé en situation de fraude et verra ses résultats à l'UE suspendus jusqu'à ce que la section disciplinaire, saisie en la matière se prononce sur une sanction.

La clarté et la rédaction compteront pour une part importante dans la notation. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

1. Donner le développement en série entière autour de 0 ainsi que le rayon de convergence de la fonction suivante :

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \pi x^3 - \frac{e}{\ln(2)} x^2 - \sqrt{3}x \ .$$

2. Soient $\lambda > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, donner en fonction de ces paramètres le rayon de convergence de la série entière $\sum e^{-\lambda n^\alpha} x^n$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et la suite récurrente $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_{n+1} = \frac{\lambda}{n+1} u_n$ pour $n \geq 0$.
   (a) Donner, en fonction de λ, le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$.
   (b) Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, et en fonction de u_0, la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$.

Exercice 2 On définit les fonctions *Zeta de Riemann* et *Êta de Dirichlet* par

$$\forall s > 1 \ , \quad \zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} \ , \qquad \text{et} \qquad \forall s > 0 \ , \quad \eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \ .$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et $k \geq 0$, on a $\frac{d^k}{ds^k}\left(n^{-s}\right) = (-\ln n)^k n^{-s}$.
2. Montrer que, pour tout $k \geq 0$, la série définissant $\zeta^{(k)}$ converge normalement sur tout intervalle $[1+\delta, +\infty[$ avec $\delta > 0$. En déduire que $\zeta \in C^\infty(]1, +\infty[)$.
3. Montrer que ζ est décroissante et convexe sur $]1, +\infty[$.
4. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et $s > 1$, on a l'encadrement

$$\frac{1}{(n+1)^s} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leq \frac{1}{n^s} \ .$$

   En déduire ensuite que

$$\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1} \ .$$

5. Justifier que $\lim\limits_{s\to\infty} \zeta(s) = 1$.
6. Tracer l'allure de la courbe représentative de ζ.
7. Montrer que la série définissant η converge uniformément sur tout intervalle $[\delta, +\infty[$.
8. (Bonus) Montrer que pour tout $s > 1$ on a $\eta(s) = \zeta(s)\left(1 - 2^{1-s}\right)$.

   Indication : Séparer les séries en indices pairs et impairs, et justifier pourquoi ce découpage est autorisé.

   Culture : *Les fonctions ζ et η sont bien définies et analytiques sur $\{\Re(z) > 1\}$ et $\{\Re(z) > 0\}$, la relation ci-dessus permet ainsi d'étendre ζ à tout $\{\Re(z) > 0\}\backslash\{1\}$ de manière analytique par $\zeta(z) = \left(1 - 2^{s-1}\right)^{-1} \eta(z)$ grâce au principe des zéros isolés/prolongement analytique (Exercice 11 du TD2).*