

ANALYSE RÉELLE 2 - EDMAM4C1
INTÉGRALE DE RIEMANN, SUITES ET SÉRIES DE
FONCTIONS

JEAN-MARC BOUCLET
e-mail : Jean-Marc.Bouclet@math.univ-lille1.fr

29 juin 2022

Chapitre 1

Intégrale de Riemann (2 semaines)

1.1 Intégrale des fonctions en escalier

Dans ce paragraphe, $[a, b]$ désigne un intervalle (fermé borné) de $\mathbb{R}$ avec $a < b$

Définition 1.1. On appelle **subdivision** $\mathcal{S}$ de $[a, b]$ la donnée de points $(x_0, \dots, x_N)$ tels que

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b.$$

Définition 1.2. Une subdivision $\mathcal{S}'$ de $[a, b]$ est dite **plus fine** qu'une subdivision $\mathcal{S}$ (de $[a, b]$ aussi) si tous les points de $\mathcal{S}$ font partie des points de $\mathcal{S}'$. On notera

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$$

faire un dessin

Proposition 1.3. Etant données deux subdivisions $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ de $[a, b]$ il existe une subdivision $\mathcal{S}$ plus fine que $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$.

Preuve. Prendre la subdivision associée à tous les points de $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$.

Définition 1.4. On appelle **pas** d'une subdivision $\mathcal{S}$, noté $\Delta(\mathcal{S})$, la quantité

$$\Delta(\mathcal{S}) = \max_{1 \leq i \leq N} (x_i - x_{i-1})$$

Définition 1.5. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite en **escalier** s'il existe une subdivision $\mathcal{S}$ telle que f soit constante sur chacun des intervalles ouverts $]x_{i-1}, x_i[$ ($1 \leq i \leq N$). Une telle subdivision sera dite **associée** ou **adaptée** à f . On note

$$\mathcal{E}([a, b])$$

l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Proposition 1.6. $\mathcal{E}([a, b])$ est une algèbre, i.e. si $f, g \in \mathcal{E}([a, b])$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda f + \mu g \in \mathcal{E}([a, b]), \quad fg \in \mathcal{E}([a, b]).$$

Preuve. Si $\mathcal{S}_1$ est une subdivision associée à f et $\mathcal{S}_2$ une autre associée à g , alors toute division plus fine que $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ (il en existe par la Proposition 1.3) est associée à $\lambda f + \mu g$ et fg . $\square$

Lemme 1.7. Si $f \in \mathcal{E}([a, b])$ et $\mathcal{S}_1 = (x_0, \dots, x_N)$, $\mathcal{S}_2 = (y_0, \dots, y_M)$ sont subdivisions associées à f , alors les quantités

$$\sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1}) \times (\text{valeur de } f \text{ sur }]x_{i-1}, x_i])$$

et

$$\sum_{j=1}^M (y_j - y_{j-1}) \times (\text{valeur de } f \text{ sur }]y_{j-1}, y_j])$$

sont égales

Définition 1.8. La valeur commune du lemme précédent s'appelle **intégrale de f sur $[a, b]$** et se note

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{ou simplement} \quad \int_a^b f.$$

Preuve du lemme. Il suffit de montrer que les deux valeurs sont les mêmes que celle associée à une subdivision $\mathcal{S}$ plus fine que $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$, ce qui est clair sur un dessin. $\square$

Proposition 1.9 (Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier). Soient $f, g \in \mathcal{E}([a, b])$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

1. *Positivité.* Si $f \geq 0$, alors $\int_a^b f \geq 0$
2. *Linéarité.* $\int_a^b \lambda f + \mu g = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
3. *Relation de Chasles.* Si $c \in]a, b[$, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Preuve. Le point 1 est évident. Le 2 aussi, une fois choisie une subdivision adaptée à f et g , qui est donc adaptée aussi à $\lambda f + \mu g$. On renvoie au TD1 pour le point 3. $\square$

1.2 Fonctions Riemann intégrables

Définition 1.10. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et soit $\mathcal{S} = (x_0, \dots, x_N)$ une subdivision de $[a, b]$. Les quantités

$$\begin{aligned}\sigma(f, \mathcal{S}) &= \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1}) \inf_{]x_{i-1}, x_i[} f \\ \Sigma(f, \mathcal{S}) &= \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1}) \sup_{]x_{i-1}, x_i[} f\end{aligned}$$

s'appellent respectivement **sommes de Darboux inférieure et supérieure**.

Remarque. Le caractère borné de f assure que les sup et inf sont bien définis.

Lemme 1.11. Si f est bornée sur $[a, b]$ et $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ sont deux subdivisions de $[a, b]$, avec

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$$

alors

$$\sigma(f, \mathcal{S}) \leq \sigma(f, \mathcal{S}') \leq \Sigma(f, \mathcal{S}') \leq \Sigma(f, \mathcal{S}).$$

Informellement : $\sigma(f, \mathcal{S})$ (resp. $\Sigma(f, \mathcal{S})$) croît (resp. décroît) quand $\mathcal{S}$ croît.

Preuve. On fait la preuve dans le cas où $\mathcal{S}'$ a juste un point de plus, disons x'_{i_0} entre x_{i_0-1} et x_{i_0} . Le cas général s'obtient alors par itération de cet argument. On a

$$\sigma(f, \mathcal{S}) = \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1}) \inf_{]x_{i-1}, x_i[} f$$

et

$$\begin{aligned}\sigma(f, \mathcal{S}') &= \sum_{i=1}^{i_0-1} (x_i - x_{i-1}) \inf_{]x_{i-1}, x_i[} f + (x'_{i_0} - x_{i_0-1}) \inf_{]x_{i_0-1}, x'_{i_0}[} f \\ &\quad + (x_{i_0} - x'_{i_0}) \inf_{]x'_{i_0}, x_{i_0}[} f + \sum_{i=i_0+1}^N (x_i - x_{i-1}) \inf_{]x_{i-1}, x_i[} f\end{aligned}$$

de sorte que $\sigma(f, \mathcal{S}') - \sigma(f, \mathcal{S})$ vaut

$$(x'_{i_0} - x_{i_0-1}) \inf_{]x_{i_0-1}, x'_{i_0}[} f + (x_{i_0} - x'_{i_0}) \inf_{]x'_{i_0}, x_{i_0}[} f - (x_{i_0} - x_{i_0-1}) \inf_{]x_{i_0-1}, x_{i_0}[} f$$

ou encore, en écrivant,

$$x_{i_0} - x_{i_0-1} = x_{i_0} - x'_{i_0} + x'_{i_0} - x_{i_0-1}$$

$$(x'_{i_0} - x_{i_0-1}) \left(\inf_{]x_{i_0-1}, x'_{i_0}[} f - \inf_{]x_{i_0-1}, x_{i_0}[} f \right) + (x_{i_0} - x'_{i_0}) \left(\inf_{]x'_{i_0}, x_{i_0}[} f - \inf_{]x_{i_0-1}, x_{i_0}[} f \right).$$

Comme

$$\inf_{]x_{i_0-1}, x'_{i_0}[} f \geq \inf_{]x_{i_0-1}, x_{i_0}[} f, \quad \inf_{]x'_{i_0}, x_{i_0}[} f \geq \inf_{]x_{i_0-1}, x_{i_0}[} f$$

(par inclusion des intervalles), il s'en suit que $\sigma(f, \mathcal{S}') - \sigma(f, \mathcal{S}) \geq 0$. D'où le résultat pour les sommes de Darboux inférieures. On procède de manière analogue pour les sommes supérieures en utilisant que

$$\sup_{]x_{i_0-1}, x'_{i_0}[} f \leq \sup_{]x_{i_0-1}, x_{i_0}[} f, \quad \sup_{]x'_{i_0}, x_{i_0}[} f \leq \sup_{]x_{i_0-1}, x_{i_0}[} f.$$

□

Proposition 1.12. *Si f est bornée sur $[a, b]$, les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$*

$$\sigma := \{\sigma(f, \mathcal{S}) \mid \mathcal{S} \text{ subdivision de } [a, b]\}, \quad \Sigma := \{\Sigma(f, \mathcal{S}) \mid \mathcal{S} \text{ subdivision de } [a, b]\}$$

sont respectivement (non vides et) majoré et minoré. En particulier, $\sup \sigma$ et $\inf \Sigma$ existent. De plus

$$\sup \sigma \leq \inf \Sigma.$$

Preuve. On montre que σ est majoré. Sélectionnons une subdivision $\mathcal{S}_0$ quelconque de $[a, b]$. On va montrer que

$$\sigma(f, \mathcal{S}) \leq \Sigma(f, \mathcal{S}_0), \quad \text{pour toute } \mathcal{S} \tag{1.2.1}$$

i.e. que le nombre $\Sigma(f, \mathcal{S}_0)$ est un majorant de σ . En effet, étant donnée $\mathcal{S}$ une subdivision quelconque de $[a, b]$ on peut toujours trouver une subdivision $\mathcal{S}'$ qui soit plus fine que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_0$ (Proposition 1.3) et par le Lemme 1.11 on obtient

$$\sigma(f, \mathcal{S}) \leq \sigma(f, \mathcal{S}') \quad \text{et} \quad \Sigma(f, \mathcal{S}') \leq \Sigma(f, \mathcal{S}_0)$$

d'où (1.2.1) suit immédiatement. De (1.2.1), on déduit que $\sup \sigma \leq \Sigma(f, \mathcal{S}_0)$. Comme $\mathcal{S}_0$ est arbitraire (et peut donc parcourir tout Σ), on en déduit que $\sup \sigma$ est un minorant de Σ (qui admet donc une borne inférieure) et que $\inf \Sigma \geq \sup \sigma$ (l'inf est supérieur ou égal à n'importe quel minorant). □

Définition 1.13. *Une fonction bornée $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est **Riemann intégrable** si*

$$\sup \sigma = \inf \Sigma,$$

auquel cas on définit l'intégrale par

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx := \sup \sigma = \inf \Sigma.$$

On utilisera aussi parfois la notation

$$\int_{[a,b]} f$$

pour désigner cette même quantité.

Remarque. Nous verrons dans le Corollaire 1.19 que, dans le cas des fonctions en escalier, les deux définitions d'intégrale coïncident.

1.3 Critères d'intégrabilité et propriétés de l'intégrale

Un des objectifs de ce paragraphe est de prouver le théorème suivant.

Théorème 1.14 (Propriétés de l'intégrale de Riemann). *Soient f, g Riemann intégrables sur $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors*

1. *Positivité.* Si $f \geq 0$, alors $\int_a^b f \geq 0$.
2. *Linéarité.* $f + g$ et λf sont Riemann intégrables et

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g, \quad \int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

3. *Inégalité triangulaire.* $|f|$ est également Riemann intégrable et

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

4. *Relation de Chasles.* Si $c \in]a, b[$, f est Riemann intégrable sur $[a, c]$ et sur $[b, c]$, de plus

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Pour cela, nous aurons besoin de critères d'intégrabilité.

Proposition 1.15 (Critère 1). *Une fonction bornée f est Riemann intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0, \text{ il existe une subdivision } \mathcal{S} \text{ de } [a, b] \text{ telle que } \Sigma(f, \mathcal{S}) - \sigma(f, \mathcal{S}) < \epsilon. \quad (1.3.2)$$

En outre, pour toute telle subdivision $\mathcal{S}$, si $\mathcal{S}'$ est plus fine que $\mathcal{S}$ alors

$$\Sigma(f, \mathcal{S}') - \sigma(f, \mathcal{S}') < \epsilon$$

Preuve. $\Rightarrow$. Si f est Riemann intégrable, par caractérisation du sup, il existe $\mathcal{S}_1$ telle que

$$\sup \sigma - \frac{\epsilon}{2} < \sigma(f, \mathcal{S}_1) \leq \sup \sigma.$$

donc en particulier, d'après le Lemme 1.11

$$\sup \sigma - \frac{\epsilon}{2} < \sigma(f, \mathcal{S}) \text{ pour tout subdivision } \mathcal{S} \text{ plus fine que } \mathcal{S}_1. \quad (1.3.3)$$

De même, par caractérisation de l'inf, il existe $\mathcal{S}_2$ telle que

$$\inf \Sigma \leq \Sigma(f, \mathcal{S}_2) < \inf \Sigma + \frac{\epsilon}{2}$$

et à nouveau par le Lemme 1.11,

$$\Sigma(f, \mathcal{S}) < \inf \Sigma + \frac{\epsilon}{2} \text{ pour tout subdivision } \mathcal{S} \text{ plus fine que } \mathcal{S}_2. \quad (1.3.4)$$

En choisissant $\mathcal{S}$ plus fine que $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ (possible d'après la Proposition 1.3), on déduit de (1.3.3) et (1.3.4) que

$$\Sigma(f, \mathcal{S}) - \sigma(f, \mathcal{S}) < \inf \Sigma + \frac{\epsilon}{2} - \sup \sigma + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

en utilisant l'hypothèse de Riemann intégrabilité disant que $\inf \Sigma = \sup \sigma$.

$\Leftarrow$. Utilisant que l'inf est un minorant, on a $\Sigma(f, \mathcal{S}) \geq \inf \Sigma$ et donc

$$-\sigma(f, \mathcal{S}) < \epsilon - \Sigma(f, \mathcal{S}) \leq \epsilon - \inf \Sigma$$

qui donne

$$\sigma(f, \mathcal{S}) \geq \inf \Sigma - \epsilon$$

et comme $\sup \sigma$ majore $\sigma(f, \mathcal{S})$,

$$\sup \sigma \geq \inf \Sigma - \epsilon.$$

Comme ϵ est arbitraire, on peut le laisser tendre vers 0 et on obtient

$$\sup \sigma \geq \inf \Sigma.$$

Comme par ailleurs on a toujours $\sup \sigma \leq \inf \Sigma$ d'après la Proposition 1.12, on obtient l'égalité et donc la Riemann intégrabilité.

Pour le dernier point, le Lemme 1.11 garantit que si $\mathcal{S}'$ est plus fine que $\mathcal{S}$ on a

$$\Sigma(f, \mathcal{S}') - \sigma(f, \mathcal{S}') \leq \Sigma(f, \mathcal{S}) - \sigma(f, \mathcal{S})$$

qui implique le résultat. □

Proposition 1.16 (Critère 2). *Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann intégrable si et seulement si*

$$\Sigma(f, \mathcal{S}) - \sigma(f, \mathcal{S}) \rightarrow 0 \quad \text{quand } \Delta(\mathcal{S}) \rightarrow 0 \quad (1.3.5)$$

où on rappelle que $\Delta(\mathcal{S})$ est le pas de la subdivision $\mathcal{S}$ (Définition 1.4). Si c'est le cas,

$$\lim_{\Delta(\mathcal{S}) \rightarrow 0} \Sigma(f, \mathcal{S}) = \lim_{\Delta(\mathcal{S}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{S}) = \int_a^b f. \quad (1.3.6)$$

Notons que le sens précis de (1.3.5) est

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que, pour toute } \mathcal{S}, \Delta(\mathcal{S}) < \delta \implies 0 \leq \Sigma(f, \mathcal{S}) - \sigma(f, \mathcal{S}) < \epsilon$$

Preuve. $\Leftarrow$. C'est une conséquence immédiate du Critère 1 puisque (1.3.5) implique que (1.3.2) est satisfaite et donc que f est Riemann intégrable.

$\Rightarrow$. Supposons f Riemann intégrable. Soit $\epsilon > 0$. D'après le Critère 1, on peut trouver une subdivision $\mathcal{S}_\epsilon$ telle que

$$0 \leq \Sigma(f, \mathcal{S}_\epsilon) - \sigma(f, \mathcal{S}_\epsilon) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Soit $N_\epsilon + 1$ le nombre de point de cette subdivision. Étant une subdivision $\mathcal{S}$, les intervalles ouverts qui lui sont associés contiennent au plus $N_\epsilon - 1$ points de $\mathcal{S}_\epsilon$. On en déduit que

$$0 \leq \Sigma(f, \mathcal{S}) - \sigma(f, \mathcal{S}) < \frac{\epsilon}{2} + (N_\epsilon - 1)\Delta(\mathcal{S})\left(\sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f\right)$$

dont on tire le résultat. Ici on a utilisé, en notant J les intervalles ouverts de $\mathcal{S}$ contenant des points de $\mathcal{S}_\epsilon$ (il y en a donc au plus $N_\epsilon - 1$) et I ceux n'en contenant pas et qui sont donc, eux, contenus dans des intervalles K de $\mathcal{S}_\epsilon$,

$$\begin{aligned} \Sigma(f, \mathcal{S}) - \sigma(f, \mathcal{S}) &= \sum_I (\text{longueur de } I)(\sup_I f - \inf_I f) + \\ &\quad \sum_J (\text{longueur de } J)(\sup_J f - \inf_J f) \\ &\leq \sum_K (\text{longueur de } K)(\sup_K f - \inf_K f) + (N_\epsilon - 1)\Delta(\mathcal{S})\left(\sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f\right) \\ &\leq \Sigma(f, \mathcal{S}_\epsilon) - \sigma(f, \mathcal{S}_\epsilon) + (N_\epsilon - 1)\Delta(\mathcal{S})\left(\sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f\right). \end{aligned}$$

Il reste à prouver (1.3.6). Comme

$$\sigma(f, \mathcal{S}) \leq \int_a^b f \leq \Sigma(f, \mathcal{S})$$

on a

$$0 \leq \int_a^b f - \sigma(f, \mathcal{S}) \leq \Sigma(f, \mathcal{S}) - \sigma(f, \mathcal{S})$$

et le résultat suit du théorème des gendarmes. $\square$

Proposition 1.17 (Critère 3). *Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann intégrable si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists f_-, f_+ \text{ fonctions en escalier telles que } f_- \leq f \leq f_+ \text{ et } \int_a^b (f_+ - f_-) < \epsilon.$$

Précisons que

$$f_- \leq f \leq f_+ \quad \text{signifie} \quad f_-(x) \leq f(x) \leq f_+(x) \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

Preuve. $\Rightarrow$. Si f est Riemann intégrable, et $\epsilon > 0$ considérons une subdivision $\mathcal{S}$ comme dans le Critère 1. Notons I les intervalles ouverts (disjoints) de cette subdivision et définissons $f_{\pm}$ par

$$f_+(x) = \begin{cases} \sup_I f & \text{si } x \text{ est dans l'un des } I \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases}, \quad f_-(x) = \begin{cases} \inf_I f & \text{si } x \text{ est dans l'un des } I \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases}.$$

On a alors clairement

$$f_- \leq f \leq f_+ \quad \int_a^b f_- = \sigma(f, \mathcal{S}), \quad \int_a^b f_+ = \Sigma(f, \mathcal{S}),$$

qui donne le résultat (en utilisant la Proposition 1.9).

$\Leftarrow$. Soit $\epsilon > 0$ et considérons f_-, f_+ comme dans l'énoncé. Quitte à prendre une subdivision plus fine que nous noterons $\mathcal{S}$, on peut supposer f_- et f_+ constantes sur chaque intervalle ouvert de $\mathcal{S}$. Mais alors, comme $f_- \leq f \leq f_+$

$$\sigma(f, \mathcal{S}) \geq \int_a^b f_- \quad \text{et} \quad \Sigma(f, \mathcal{S}) \leq \int_a^b f_+ \quad (1.3.7)$$

et par conséquent,

$$\Sigma(f, \mathcal{S}) - \sigma(f, \mathcal{S}) \leq \int_a^b f_+ - \int_a^b f_- = \int_a^b f_+ - f_- < \epsilon.$$

La Riemann intégrabilité de f suit donc du Critère 1. □ □

Corollaire 1.18. *Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann intégrable si et seulement si il existe deux suites de fonctions en escaliers $(f_{-n}), (f_{+n})$ telles que*

$$f_{-n} \leq f \leq f_{+n}, \quad \int_a^b f_{+n} - f_{-n} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty, \quad (1.3.8)$$

auquel cas on a

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_{+n}. \quad (1.3.9)$$

Preuve. Si f est Riemann intégrable, on peut choisir des fonctions f_{+n}, f_{-n} comme dans le Critère 3 avec $\epsilon = 1/n$. Réciproquement, si des suites vérifiant (1.3.8) existent, le Critère 3 montre la Riemann intégrabilité de f . Considérons à présent deux suites quelconques vérifiant (1.3.8) et démontrons (1.3.9). Comme remarqué dans (1.3.7), si on appelle $\mathcal{S}_n$ une subdivisions adaptée à f_{+n} et f_{-n} , on a

$$\sigma(f, \mathcal{S}_n) \geq \int_a^b f_{-n} \quad \text{et} \quad \Sigma(f, \mathcal{S}_n) \leq \int_a^b f_{+n}.$$

Par conséquent, utilisant qu'un inf (resp. sup) est un minorant (resp. majorant), on a

$$\sigma = \sup_{\mathcal{S}} \sigma(f, \mathcal{S}) \geq \int_a^b f_{-n} \quad \text{et} \quad \Sigma = \inf_{\mathcal{S}} \Sigma(f, \mathcal{S}) \leq \int_a^b f_{+n}.$$

Comme $\Sigma = \sigma = \int_a^b f$ par intégrabilité de f , cela donne

$$\int_a^b f_{-n} \leq \int_a^b f \leq \int_a^b f_{+n}. \quad (1.3.10)$$

Montrons que $\int_a^b f_{-n} \rightarrow \int_a^b f$. En effet

$$0 \leq \int_a^b f - \int_a^b f_{-n} \leq \int_a^b f_{+n} - \int_a^b f_{-n} = \int_a^b (f_{+n} - f_{-n}) \rightarrow 0$$

donc le Théorème des gendarmes donne le résultat. On procède de même pour montrer que $\int_a^b f_{+n} \rightarrow \int_a^b f$. $\square$

Corollaire 1.19. *Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est en escalier, les définitions 1.8 et 1.13 de $\int_a^b f$ coïncident.*

Preuve. Prendre $f_{+n} = f_{-n} = f$ dans le Corollaire 1.18. $\square$

Preuve du Théorème 1.14. Cela suit des propriétés sur les fonctions en escalier par passage à la limite, en utilisant le Corollaire 1.18. Plus précisément, on choisit des suites $(f_{-n}), (f_{+n})$ (resp. $(g_{-n}), (g_{+n})$) pour f (resp. g). Alors

1. Comme $f_{+n} \geq f \geq 0$, on a $\int_a^b f_{+n} \geq 0$ d'après le point 1 de la Proposition 1.9, par passage à la limite $\int_a^b f \geq 0$.
2. Comme $f_{-n} + g_{-n} \leq f + g \leq f_{+n} + g_{+n}$ où $f_{+n} + g_{+n}$ et $f_{-n} + g_{-n}$ sont en escaliers, et $\int_a^b (f_{+n} + g_{+n}) - \int_a^b (f_{-n} + g_{-n}) = \int_a^b (f_{+n} - f_{-n}) + \int_a^b (g_{+n} - g_{-n}) \rightarrow 0$, $f + g$ est Riemann intégrable et

$$\int_a^b (f + g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_{+n} + g_{+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_{+n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_{+n} = \int_a^b f + \int_a^b g,$$

où on a utilisé le point 2 de la Proposition 1.9. On procède de même pour λf , avec les encadrements $\lambda f_{-n} \leq \lambda f \leq \lambda f_{+n}$ si $\lambda \geq 0$ et $\lambda f_{+n} \leq \lambda f \leq \lambda f_{-n}$ si $\lambda < 0$.

3. On a (cf TD)

$$\min(f_{-n}, 0) \leq \min(f, 0) \leq \min(f_{+n}, 0)$$

et

$$\int_a^b \min(f_{+n}, 0) - \min(f_{-n}, 0) \leq \int_a^b f_{+n} - f_{-n}$$

où $\min(f_{\pm n}, 0)$ sont en escaliers. Cela implique que $\min(f, 0)$ est intégrable. On procède de même pour $\max(f, 0)$ et comme $|f| = \max(f, 0) - \min(f, 0)$ on obtient l'intégrabilité de $|f|$. En outre comme $f \leq |f|$ et $-f \leq |f|$, par positivité et linéarité on a

$$\pm \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

qui donne le résultat.

4. Laissé au lecteur.

□

Conventions. Jusqu'ici on étudié l'intégrabilité et défini l'intégrale sur $[a, b]$ avec $a < b$. Si $a = b$, on conviendra que

$$\int_a^a f = 0$$

et si $a > b$ que

$$\int_a^b f = - \int_b^a f.$$

Ces conventions sont naturelles, notamment en raison du Théorème Fondamental de l'Analyse (Corollaire 1.23). En outre, on vérifie aisément que la linéarité de l'intégrale et la relation de Chasles restent valables lorsque $a \geq b$.

Concernant les **fonctions à valeurs complexes** (et plus généralement dans un $\mathbb{R}\text{-v.n.}$ de dimension finie muni d'une base), la Riemann intégrabilité signifiera la Riemann intégrabilité des parties réelles et imaginaires, auquel cas on posera

$$\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re}(f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(f).$$

On peut vérifier aisément que l'intégrale des fonctions Riemann intégrables à valeurs complexes est $\mathbb{C}$ -linéaire (vérification laissée au lecteur).

1.4 Résultats usuels sur les fonctions continues par morceaux

Définition 1.20. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **continue par morceaux** s'il existe une subdivision $\mathcal{S} = (x_0, \dots, x_N)$ telle que

1. f est continue sur chaque intervalle ouvert $]x_{i-1}, x_i[$, $1 \leq i \leq N$.

1.4. RÉSULTATS USUELS SUR LES FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX 13

2. f a des limites finies en x_{i-1}^+ et x_i^- pour chaque $1 \leq i \leq N$.

Exemples. Les fonctions en escaliers sur $[a, b]$, les fonctions continues sur $[a, b]$ sont continues par morceaux.

Attention. $x \mapsto 1/x$ (prolongée comme on veut en 0) n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$

Théorème 1.21. *Toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ y est Riemann intégrable.*

Preuve. On fait la preuve uniquement dans le cas continu. Soit donc $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Comme $[a, b]$ est compact (i.e. fermé borné), f est *uniformément* continue sur $[a, b]$, i.e.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in [a, b], |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Fixons $\epsilon > 0$ et choisissons $\delta > 0$ tel que

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b - a} \quad \text{dès que } |x - y| < \delta.$$

Considérons la subdivision de $[a, b]$ définie par

$$x_k = a + k \frac{b - a}{N}, \quad k \in \{0, \dots, N\}$$

où on choisit N assez grand pour que $\frac{b-a}{N} < \delta$. Définissons alors les fonctions en escaliers $f_{\pm}$ par

$$f_+(x) = \begin{cases} \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f & \text{si } x \in]x_{k-1}, x_k[\\ f(x_k) & \text{si } x = x_k \end{cases} \quad f_-(x) = \begin{cases} \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f & \text{si } x \in]x_{k-1}, x_k[\\ f(x_k) & \text{si } x = x_k \end{cases}.$$

Par construction, on a $f_- \leq f \leq f_+$. En outre

$$\int_a^b f_+ - f_- = \sum_{k=1}^N (x_k - x_{k-1}) \left(\sup_{[x_{k-1}, x_k]} f - \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \right).$$

Par continuité de f , pour chaque k , il existe α_k, β_k dans $[x_{k-1}, x_k]$ tels que

$$\sup_{[x_{k-1}, x_k]} f = f(\beta_k), \quad \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f = f(\alpha_k).$$

Comme

$$|\alpha_k - \beta_k| \leq x_k - x_{k-1} = \frac{b - a}{N} < \delta$$

on a $0 \leq f(\beta_k) - f(\alpha_k) < \epsilon / (b - a)$ et donc

$$0 \leq \int_a^b f_+ - f_- < \sum_{k=1}^N (x_k - x_{k-1}) \frac{\epsilon}{b - a} = \epsilon.$$

D'après le Critère 3, f est donc Riemann intégrable. □

Théorème 1.22. *Si f est continue sur $[a, b]$, alors $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f (elle est définie pour $x \in [a, b]$).*

Preuve. Il s'agit de démontrer que pour tout $x \in [a, b]$,

$$\frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) \rightarrow f(x), \quad h \rightarrow 0$$

et plus précisément $h \rightarrow 0^+$ si $x = a$, $h \rightarrow 0^-$ si $x = b$ (h est de signe quelconque si $x \in]a, b[$). Pour éviter de discuter suivant que $x < x + h$ ou $x > x + h$, on va noter I_h l'intervalle d'extrémités x et $x + h$. Commençons par observer que, par la relation de Chasles et le fait que $\int_x^{x+h} 1dt = h$, on a

$$\frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) - f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) - f(x)dt.$$

Puis, par inégalité triangulaire on obtient

$$\left| \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) - f(x) \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_{I_h} |f(x) - f(t)|dt. \quad (1.4.11)$$

Fixons alors $\epsilon > 0$. Par continuité de f au point x , il existe $\delta > 0$ tel que

$$|t - x| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - f(t)| < \epsilon.$$

En particulier, pour tout $|h| < \delta$, on a $|t - x| < \delta$ pour tout $t \in I_h$ donc $|f(x) - f(t)| < \epsilon$ donc on déduit par positivité de l'intégrale que

$$\frac{1}{|h|} \int_{I_h} |f(x) - f(t)|dt \leq \frac{1}{|h|} \int_{I_h} \epsilon dt = \epsilon.$$

On a donc montré que pour tout $\epsilon > 0$, le membre de gauche de (1.4.11) était inférieur ou égal à ϵ pour $0 < |h| < \delta$ (car le membre de droite l'est), ce qui est exactement le résultat cherché. $\square$

Corollaire 1.23 (Théorème fondamental de l'analyse). *Si f est C^1 sur $[a, b]$ alors*

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Preuve. D'après le théorème précédent, f et $x \mapsto \int_a^x f'(t)dt$ ont même dérivée sur $[a, b]$ qui est un intervalle, donc ces deux fonctions diffèrent d'une constante : il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \int_a^x f'(t)dt + C, \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

En évaluant en $x = a$, l'intégrale est nulle donc $C = f(a)$. Le résultat s'obtient alors par évaluation en $x = b$. $\square$

Remarque. A noter que ce corollaire n'est énoncé que pour des fonctions de classe C^1 .

1.4. RÉSULTATS USUELS SUR LES FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX 15

Théorème 1.24 (Changement de variable). *Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ est C^1 , alors*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Remarques importantes : 1- L'hypothèse ne dit pas que $\varphi([\alpha, \beta]) = [a, b]$, ni encore moins que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$, mais que $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$.

2- On ne demande pas que φ soit une bijection (même si c'est souvent le cas en pratique).

Preuve. Considérons les fonctions de $s \in [\alpha, \beta]$ définies par

$$F_1(s) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(s)} f(x)dx, \quad F_2(s) = \int_{\alpha}^s f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Elles vérifient $F_1(\alpha) = 0 = F_2(\alpha)$. En outre, d'après le Théorème 1.22, on a $F_2'(s) = f(\varphi(s))\varphi'(s)$. Par ailleurs F_1 est la composée d'une primitive de f (toujours d'après le Théorème 1.22) et de φ donc par dérivation des fonctions composées, $F_1'(s) = f(\varphi(s))\varphi'(s)$. Ainsi F_1 et F_2 ont même dérivée sur un intervalle et coïncident en un point. Elles sont donc égales. En particulier, $F_1(\beta) = F_2(\beta)$. $\square$

Définition 1.25. *Si f est Riemann intégrable sur $[a, b]$, $\mathcal{S} = (x_0, \dots, x_N)$ est une subdivision de $[a, b]$ et si $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N$ sont des points tels que $\tilde{x}_k \in]x_{k-1}, x_k[$, on appelle **Somme de Riemann** associée la quantité*

$$\sum_{k=1}^N (x_k - x_{k-1})f(\tilde{x}_k).$$

Théorème 1.26 (Convergence des sommes de Riemann). *Les sommes de Riemann associées à une fonction Riemann intégrable f sur $[a, b]$ convergent vers $\int_a^b f$ quand le pas de la subdivision tend vers 0. En particulier, si on pose $h_n = (b - a)/n$,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n \sum_{k=0}^{n-1} f(a + kh_n) = \int_a^b f.$$

Preuve. C'est une conséquence directe du Critère 2, une fois observé le fait que

$$\sigma(f, \mathcal{S}) \leq \sum_{k=1}^N (x_k - x_{k-1})f(\tilde{x}_k) \leq \Sigma(f, \mathcal{S}).$$

$\square$

Chapitre 2

Suites et séries de fonctions (3 semaines)

2.1 Suites de fonctions

Dans cette partie, I désigne une partie a priori quelconque de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur I , i.e. pour chaque n on a une fonction $f_n : I \rightarrow \mathbb{C}$.

Définition 2.1. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge simplement** sur I si pour chaque $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$ est convergente. On dit que cette suite **converge simplement vers f sur I** , si

$$\text{pour chaque } x \in I, \quad f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \quad (2.1.1)$$

Pour comparaison avec la suite, il est utile de réécrire (2.1.1) avec des quantificateurs :

$$\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon. \quad (2.1.2)$$

Il faut retenir en particulier que le n_0 dépend ici de x et de ϵ .

Si une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{C}$ est bornée (c'est le cas en particulier si g est continue et $I = [a, b]$), on définit

$$\|g\|_\infty = \sup_I |g(x)|.$$

Définition 2.2. La suite $(f_n)_{n \geq 0}$ **converge uniformément** sur I vers f si

$$\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty. \quad (2.1.3)$$

Cela sous-entend en particulier que pour chaque n la fonction $f_n - f$ est bornée sur I .

En termes de quantificateurs, cela donne

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \quad \|f_n - f\|_\infty < \epsilon \quad (2.1.4)$$

et, en utilisant que

$$\forall x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty,$$

cela donne aussi

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad (2.1.5)$$

où il faut noter la position du $\forall x \in I$ par rapport à (2.1.2) : ici le n_0 ne dépend que de ϵ et pas de x .

Remarque. Ici, nous avons observé que (2.1.3) $\Rightarrow$ (2.1.5). On laisse au lecteur le soin de vérifier que (2.1.5) $\Rightarrow$ (2.1.3).

Proposition 2.3. *Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent uniformément sur I , respectivement vers f et g , alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $(\lambda f_n + g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers $\lambda f + g$.*

Preuve. Pour tout $x \in I$, on a

$$\begin{aligned} |\lambda f_n(x) + g_n(x) - (\lambda f(x) + g(x))| &= |\lambda(f_n(x) - f(x)) + g_n(x) - g(x)| \\ &\leq |\lambda| |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| \end{aligned}$$

et donc en passant au sup sur I ,

$$\|(\lambda f_n + g_n) - (\lambda f + g)\|_\infty \leq |\lambda| \|f_n - f\|_\infty + \|g_n - g\|_\infty \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

ce qui prouve le résultat. □

Proposition 2.4. *La convergence uniforme implique la convergence simple.*

Preuve. Il suffit d'observer que (2.1.5) implique (2.1.2). □

Proposition 2.5 (Critère de Cauchy uniforme). *La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I (vers une fonction f) si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \geq n, \forall m, n \geq n_0, \forall x \in I, \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon. \quad (2.1.6)$$

ou de façon équivalente

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \geq n, \forall m, n \geq n_0, \quad \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon. \quad (2.1.7)$$

Preuve. $\Rightarrow$ Supposons que (f_n) converge uniformément vers f sur I . Alors, par définition, si on se fixe $\epsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\text{pour tout } x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Mais alors, pour tous $m, n \geq n_0$ et tout $x \in I$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < 2\frac{\epsilon}{2}$$

i.e. on a prouvé (2.1.6).

$\Leftarrow$ Supposons (2.1.6). On va commencer par construire une fonction f , candidate à être la limite uniforme. A x fixé, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une de Cauchy de réels, d'après (2.1.6). Comme $\mathbb{R}$ est complet, elle est convergente. On peut donc définir, pour chaque $x \in I$,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Par construction, f_n converge simplement vers f . Montrons que la convergence est uniforme. Soit $\epsilon > 0$. Par critère de Cauchy uniforme, il existe n_0 tel que

$$n \geq n_0, \quad m \geq n_0, \quad x \in I \quad \implies \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

En laissant $m \rightarrow +\infty$, on en déduit

$$n \geq n_0, \quad x \in I \quad \implies \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

et donc

$$n \geq n_0 \quad \implies \quad \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

On a donc obtenu (2.1.4) qui est le résultat cherché. $\square$

Remarques.

1. Le critère de Cauchy uniforme sera particulièrement utile dans l'étude des séries de fonctions.
2. Il résulte de la preuve que la limite de f_n est la fonction f définie sur I par

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad x \in I.$$

L'intérêt principal de la convergence uniforme est de d'obtenir des informations sur la régularité de la limite. Considérons l'exemple suivant.

Exemple. Considérons la suite définie sur $[0, 1]$ et pour $n \geq 1$ par $f_n(x) = x^n$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad \text{si } x \in [0, 1[, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 1.$$

Autrement dit, $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers f sur $[0, 1]$ où

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Cet exemple montre que la continuité de chaque f_n ne suffit pas à garantir la continuité de la limite, si on a seulement convergence simple.

Théorème 2.6. *Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions **continues** sur I qui vérifie le critère de Cauchy uniforme sur I , alors elle converge uniformément sur I vers une fonction f qui est continue.*

Autrement dit, une limite uniforme de fonctions continues est une fonction continue.

Preuve. Soit f la limite uniforme de f_n , qui existe d'après la Proposition 2.5. Montrons que f est continue en chaque point $x_0 \in I$. Soit donc $x_0 \in I$ et $\epsilon > 0$. On veut montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$x \in I \text{ et } |x - x_0| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Commençons, grâce à la convergence uniforme, par choisir $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_{n_0} - f\|_\infty < \epsilon/3$. Cela implique que

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{pour tout } x \in I. \quad (2.1.8)$$

Par ailleurs, la continuité de f_{n_0} en x_0 assure l'existence de $\delta > 0$ tel que

$$x \in I \text{ et } |x - x_0| < \delta \quad \implies \quad |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}. \quad (2.1.9)$$

On en déduit que pour tout $x \in I$ tel que $|x - x_0| < \delta$, on a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

le premier et le troisième termes étant majorés grâce à (2.1.8) et le deuxième grâce à (2.1.9). D'où le résultat. $\square$

Ce théorème peut s'interpréter comme un résultat de permutation de limite : pour chaque $x_0 \in I$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right).$$

De même, la convergence uniforme permet de permuter limite $n \rightarrow \infty$ et intégrale.

Théorème 2.7. *Si $I = [a, b]$ et $(f_n)_{n \geq 0}$ est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$. Alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \left(= \int_a^b f(x) dx \right).$$

Preuve. Il suffit d'écrire

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx$$

et d'utiliser, par définition de $\|\cdot\|_\infty$, que $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$ pour tout $x \in [a, b]$, de sorte que

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty dx = (b - a) \|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

La conclusion suit du théorème des gendarmes. $\square$

Théorème 2.8. Si $(f_n)_{n \geq 0}$ est une suite de fonctions C^1 sur $I = [a, b]$ telle que :

1. la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur I (par exemple si on connaît une fonction g vers laquelle elle converge uniformément),
2. il existe un $x_0 \in I$ tel que la suite $(f_n(x_0))_{n \geq 0}$ soit convergente.

Alors, $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur I vers une fonction f de classe C^1 . En outre,

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Remarque. Bien sûr, $(f'_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f' .

Preuve. Par le théorème fondamental de l'analyse, on a

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt.$$

Posons $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$ (qui existe d'après la deuxième hypothèse) soit g la fonction vers laquelle (f'_n) converge uniformément. Comme les f'_n sont continues, g est continue d'après le Théorème 2.6. On peut donc définir pour chaque $x \in I$

$$f(x) = \ell + \int_{x_0}^x g(t) dt.$$

Comme g est continue, f est de classe C^1 puisque c'est une primitive de g . Par ailleurs, pour chaque $x \in I$,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt - \ell - \int_{x_0}^x g(t) dt \right| \\ &\leq |f_n(x_0) - \ell| + \int_{[x_0, x]} |f'_n(t) - g(t)| dt \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|f_n - f\|_\infty \leq |f_n(x_0) - \ell| + (b - a) \|f'_n - g\|_\infty \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

i.e. que f_n converge uniformément vers f . En outre, pour chaque $x \in I$,

$$f'(x) = g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

ce qui termine la preuve. $\square$

2.2 Séries de fonctions

Dans tout ce qui suit, les fonctions sont encore à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.9. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur un intervalle I . On appelle **série de fonction** $\sum u_n$ la suite de fonctions $(U_N)_{N \in \mathbb{N}}$ où

$$U_N = \sum_{n=0}^N u_n.$$

La fonction U_N s'appelle la **somme partielle** (des u_n) à l'ordre N .

Définition 2.10. On dit que la série de fonctions $\sum u_n$

— **converge simplement** sur I , si la suite des sommes partielles converge simplement sur I , i.e.

$$U_N(x) = \sum_{n=0}^N u_n(x) \text{ a une limite (finie) pour chaque } x \in I \text{ quand } N \rightarrow \infty$$

— **converge uniformément** sur I si il existe une fonction U sur I telle que

$$\left\| \sum_{n=0}^N u_n - U \right\|_{\infty} = \|U_N - U\|_{\infty} \rightarrow 0, \quad \text{quand } N \rightarrow \infty.$$

Dans tous les cas, la limite U se note

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

Remarque. Montrer qu'une série de fonctions convergence simplement revient à montrer la convergence des séries numériques $\sum_n u_n(x)$ quand $x \in I$. Pour cela, on peut utiliser toutes les méthodes vues au S3 sur les séries numériques.

Les théorèmes suivants sont des conséquences immédiates des résultats de la section précédente.

Théorème 2.11. Si $\sum u_n$ converge uniformément sur I , elle converge simplement.

Théorème 2.12 (Continuité d'une série). Supposons que les u_n soient continues sur I . Si $\sum u_n$ converge uniformément sur I , alors la somme $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est continue sur I .

Théorème 2.13 (Permutation somme-intégrale). Si $I = [a, b]$, si les u_n sont continues sur $[a, b]$ et si $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b u_n(x) dx \right).$$

En particulier, la série numérique à droite est convergente.

Théorème 2.14 (Dérivabilité d'une série). *Supposons que $I = [a, b]$ et les u_n de classe C^1 sur $[a, b]$. On suppose en outre que*

- *il existe $x_0 \in I$ tel que la série numérique $\sum_n u_n(x_0)$ soit convergente,*
- *la série de fonctions $\sum u'_n$ converge uniformément sur I .*

Alors $\sum u_n$ converge uniformément sur I et la somme de la série est de classe C^1 . En outre

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n.$$

Nous allons voir à présent quelques critères garantissant la convergence uniforme d'une série de fonctions.

Le premier est une simple réécriture dans le cadre des séries du critère de Cauchy uniforme.

Proposition 2.15 (Critère de Cauchy uniforme pour les séries). *La série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur I si et seulement*

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } N_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tous } N \geq N_0 \text{ et } p \in \mathbb{N}, \quad \left\| \sum_{n=N}^{N+p} u_n \right\|_{\infty} < \varepsilon,$$

où $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in I} |f(x)|$.

Définition 2.16 (Convergence normale). *Si $\sum u_n$ est une série de fonctions sur I telle que la série numérique $\sum \|u_n\|_{\infty}$ soit convergente (ici $\|u_n\|_{\infty} = \sup_{x \in I} |u_n(x)|$), on dit qu'elle est **normalement convergente** sur I ou qu'elle **converge normalement** sur I .*

De façon équivalente, $\sum u_n$ converge normalement si il existe une suite $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes positifs telle que

- *la série numérique $\sum \epsilon_n$ est convergente*
-

$$|u_n(x)| \leq \epsilon_n, \quad \text{pour tous } x \in I \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

Théorème 2.17 (Critère de convergence normale). *Une série qui converge normalement sur I converge uniformément sur I .*

Preuve. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $\sum \|u_n\|_{\infty}$ est convergente, le critère de Cauchy pour les séries numériques garantit l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\text{pour tout } p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=N}^{N+p} \|u_n\|_{\infty} < \varepsilon.$$

Mais alors, pour ce même N , l'inégalité triangulaire donne

$$\left\| \sum_{n=N}^{N+p} u_n \right\|_{\infty} \leq \sum_{n=N}^{N+p} \|u_n\|_{\infty} < \varepsilon,$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$. Le critère de Cauchy uniforme est donc satisfait et implique donc la convergence uniforme. $\square$

Théorème 2.18 (Critère d'Abel uniforme). *On suppose que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(o_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites de fonctions sur I telles que*

- *pour chaque $x \in I$, la suite $(a_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est réelle et décroissante vers 0 (en particulier elle est positive),*
- *la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur I ,*
- *les sommes partielles des o_n sont uniformément bornées sur I , i.e. il existe $M \geq 0$ tel que*

$$|o_0(x) + \cdots + o_N(x)| \leq M, \quad \text{pour tous } x \in I \text{ et } N \in \mathbb{N}.$$

Alors la série $\sum a_n o_n$ converge uniformément sur I .

Preuve. Notons $O_N(x) = \sum_{n=0}^N o_n(x)$. Alors

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N}^{N+p} a_n(x) o_n(x) \right| &= \left| \sum_{n=N}^{N+p} a_n(x) (O_n(x) - O_{n-1}(x)) \right| \\ &= \left| \sum_{n=N}^{N+p} a_n(x) O_n(x) - \sum_{n=N}^{N+p} a_n(x) O_{n-1}(x) \right| \\ &= \left| \sum_{n=N}^{N+p} a_n(x) O_n(x) - \sum_{n=N-1}^{N+p-1} a_{n+1}(x) O_n(x) \right| \\ &= \left| -a_N(x) O_{N-1}(x) + \sum_{n=N}^{N+p-1} (a_n(x) - a_{n+1}(x)) O_n(x) + a_{N+p}(x) O_{N+p}(x) \right| \\ &\leq a_N(x) |O_{N-1}(x)| + \sum_{n=N}^{N+p-1} (a_n(x) - a_{n+1}(x)) |O_n(x)| + a_{N+p}(x) |O_{N+p}(x)| \\ &\leq M(a_N(x) + a_{N+p}(x)) + M \sum_{n=N}^{N+p-1} a_n(x) - a_{n+1}(x) = 2Ma_N(x) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\left\| \sum_{n=N}^{N+p} a_n o_n \right\|_{\infty} \leq 2M \|a_N\|_{\infty},$$

et donc que le critère de Cauchy uniforme est satisfait par $\sum a_n o_n$ (puisque $\|a_N\|_{\infty} \rightarrow 0$). D'où le résultat. $\square$

Chapitre 3

Séries entières (3 semaines)

Dans le chapitre précédent, nous avons vu des résultats généraux sur les séries de fonctions. Les outils construits vont nous permettre de donner un sens et justifier des formules du type

$$\begin{aligned}e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \text{etc...}\end{aligned}$$

3.1 Généralités

Définition 3.1. On appelle **série entière** toute série de fonctions de la forme

$$\sum a_n x^n$$

où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels ou complexes, appelés **coefficients** de la série. Ici x est un nombre réel (la variable), mais comme nous le verrons, il peut sans problème être remplacé par un nombre complexe. En cas de convergence, la somme de la série est la fonction définie par

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

La première question concernant une série entière est de déterminer un ensemble de x pour lesquels la série est convergente.

Lemme 3.2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes. Alors l'ensemble

$$E := \{r \geq 0 \mid \text{la suite } (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\} \quad (3.1.1)$$

est un intervalle de la forme $[0, R]$ avec $R \geq 0$ ou bien $[0, R[$ avec $R \geq 0$ ou $R = +\infty$.

Preuve. Clairement $0 \in E$ et $E \subset [0, +\infty[$. Pour montrer que c'est un intervalle de la forme annoncée, il suffit de prouver que si $r_2 \in E$ et $0 \leq r_1 \leq r_2$ alors $r_1 \in E$. En effet, considérons de tels r_1 et r_2 . Alors, il existe $M \geq 0$ tel que

$$|a_n r_2^n| \leq M, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On peut supposer $r_2 > 0$ sinon $r_1 = r_2 = 0$ et le résultat est trivial. Alors $r_1/r_2 \in [0, 1]$ et donc

$$|a_n r_1^n| = |a_n r_2^n| \left| \frac{r_1}{r_2} \right|^n \leq |a_n r_2^n| \leq M, \quad \text{pour tout } n,$$

i.e. $r_1 \in E$. □

Définition 3.3. On appelle **rayon de convergence** de la série entière de coefficients $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$R = \sup E,$$

avec la convention que $R = +\infty$ si $E = [0, +\infty[$.

Remarque. Si R est fini, i.e. si E est un intervalle borné, E est non vide (car contient 0) et majoré, donc sa borne supérieure est bien définie.

Théorème 3.4. Considérons la série entière $\sum a_n x^n$ et supposons son rayon de convergence non nul (i.e. $R > 0$ ou $R = +\infty$). Alors pour tout R_1 tel que $R_1 < R$, la série converge normalement sur $[-R_1, R_1]$.

Preuve. Considérons R_2 tel que $R_1 < R_2 < R$. Alors $R_2 \in E$, et donc il existe $M \geq 0$ tel que

$$|a_n R_2^n| \leq M, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Mais alors, pour tout $x \in [-R_1, R_1]$,

$$|a_n x^n| \leq |a_n| |R_1^n| \leq |a_n R_2^n| \left| \frac{R_1}{R_2} \right|^n \leq M (R_1/R_2)^n$$

où $(R_1/R_2)^n$ est le terme général d'une série convergente (géométrique de raison $R_1/R_2 \in [0, 1[$). C'est exactement la convergence normale de la série entière sur $[-R_1, R_1]$. □

Remarque. Avec strictement la même preuve, si on considère une variable complexe z au lieu d'une variable réelle x , on obtient convergence normale sur le disque fermé $\bar{D}(0, R_1)$ pour tout $R_1 < R$.

Corollaire 3.5. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$. On le suppose non nul. Alors, la série converge sur $] -R, R[$ et sa somme est continue sur $] -R, R[$

Preuve. La convergence est claire : si $x_0 \in]-R, R[$, alors $|x_0| < R$ donc la série converge normalement sur $[-|x_0|, |x_0|]$, et en particulier simplement en x_0 . Montrons ensuite que la somme de la série est continue au point x_0 . Soit $R_1 > 0$ tel que $|x_0| < R_1 < R$. Alors $x_0 \in]-R_1, R_1[\subset [-R_1, R_1]$. Comme la série converge normalement sur $[-R_1, R_1]$ d'après le Théorème 3.4, elle est continue sur $[-R_1, R_1]$ donc sur $] - R_1, R_1[$ et en particulier en x_0 . $\square$

On verra un peu plus loin que non seulement une série entière est continue dans son intervalle (ou disque) de convergence, mais en plus qu'elle y est de classe C^∞ . Avant cela, on va donner deux critères fondamentaux pour déterminer le rayon de convergence.

Définition 3.6. *Etant donnée une suite de nombres réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On appelle **limite supérieure** de cette suite, la quantité réelle ou $+\infty$, définie par*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n := \lim_{N \rightarrow +\infty} \sup\{u_n \mid n \geq N\},$$

avec la convention que le sup à droite est infini si la suite n'est pas bornée.

Remarque importante. La suite $s_N = \sup\{u_n \mid n \geq N\}$ est constante égale à $+\infty$ si la suite (u_n) n'est pas majorée. Si $(u_n)_n$ est majorée $(s_N)_N$ est décroissante donc a une limite à coup sûr (finie ou infinie).

Proposition 3.7. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels.*

1. *Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite (finie ou infinie) alors $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$*
2. *Pour toute suite extraite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui a une limite (finie ou infinie), on a*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n \geq \lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k}.$$

3. *Il existe une suite extraite $(u_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{j \rightarrow \infty} u_{n_j}.$$

Les points 2 et 3 se résument en disant que la limite supérieure d'une suite est la plus grande de ses valeurs d'adhérence.

Preuve. Dans ce qui suit, on notera $s_N = \sup\{u_n \mid n \geq N\}$.

1. Pour fixer les idées, supposons que $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N_ε tel que

$$\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$$

pour tout $n \geq N_\varepsilon$. En particulier, pour tout $N \geq N_\varepsilon$, on a $u_n \leq \ell + \varepsilon$ donc $s_N \leq \ell + \varepsilon$ car $\ell + \varepsilon$ est un majorant de l'ensemble dont s_N est le sup. Par ailleurs, $s_N \geq u_N \geq \ell - \varepsilon$ et donc

$$\ell - \varepsilon \leq s_N \leq \ell + \varepsilon, \quad \text{pour tout } N \geq N_\varepsilon,$$

ce qui montre exactement que $s_N \rightarrow \ell$.

2. Notons $\sigma_K = \sup\{u_{n_k} \mid k \geq K\}$. D'après le point 1, $\lim_{K \rightarrow \infty} \sigma_K = \lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k}$. Par ailleurs, comme $n_k \geq k$ pour tout k (récurrence facile), on a $\{u_{n_k} \mid k \geq K\} \subset \{u_k \mid k \geq K\}$ et donc

$$s_K \geq \sigma_K$$

ce qui implique par passage à la limite $K \rightarrow \infty$, $\limsup_n u_n \geq \lim_K \sigma_K \geq \lim_k u_{n_k}$.

3. Pour fixer les idées, supposons que $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$. On va construire une suite $(u_{n_j})_j$ qui converge vers ℓ . Par caractérisation de la borne supérieure, pour chaque $N \in \mathbb{N}$, on peut trouver $u_{n_N} \in \{u_n \mid n \geq N\}$ telle que

$$s_N - 2^{-N} < u_{n_N} \leq s_N.$$

Comme $n_N \geq N$, on a $n_N \rightarrow +\infty$, et on peut en extraire une sous-suite $(n_{N_j})_j$ (de $\mathbb{N}$) strictement croissante. Alors, en posant $u_{n_j} := u_{n_{N_j}}$, on a une suite extraite de $(u_n)_n$ et

$$s_{N_j} - 2^{-N_j} \leq u_{n_j} \leq s_{N_j}$$

implique par théorème des gendarmes que $u_{n_j} \rightarrow \ell$.

□

Théorème 3.8 (Critère de Cauchy pour le rayon de convergence). *Etant donnée une série entière $\sum a_n x^n$ son rayon de convergence R vérifie*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}},$$

avec les conventions que $1/+\infty = 0$ et $1/0 = +\infty$.

Preuve. On utilise l'ensemble E introduit en (3.1.1). Pour fixer les idées, on considère là encore le cas où $R \neq 0$ et R est fini. Pour montrer le résultat, il suffit de voir que pour tous R_1, R_2 tels que $R_1 < R < R_2$ on a

$$\frac{1}{R_2} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{R_1},$$

puisqu'en faisant tendre $R_1 \uparrow R$ et $R_2 \downarrow R$, on obtiendra l'égalité cherchée. Comme $R_1 < R$, $R_1 \in E$ et donc la suite $(a_n R_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, i.e. il existe $M > 0$ tel que $|a_n| R_1^n \leq M$ pour tout n . On en déduit

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{M^{\frac{1}{n}}}{R_1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Le membre de droite tend vers $1/R_1$ quand $n \rightarrow \infty$, donc en passant à la limsup (i.e. à une sous-suite convenable pour le membre de gauche), on obtient

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{R_1}.$$

D'un autre côté, la suite $(a_n R_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée, sinon on aurait $R_2 \in E$ ce qui est exclu puisque $R_2 > \sup E$. Ainsi, il existe une suite extraite $(a_{n_k} R_2^{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$|a_{n_k} R_2^{n_k}| \rightarrow +\infty, \quad k \rightarrow +\infty.$$

Donc il existe $M > 0$ telle que

$$M < |a_{n_k} R_2^{n_k}|, \quad \text{pour tout } k \text{ assez grand}$$

et donc $|a_{n_k}|^{1/n_k} > M^{1/n_k}/R_2$ et par passage à la limite supérieure,

$$\frac{1}{R_2} \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} |a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}}.$$

Or $\limsup_{k \rightarrow +\infty} |a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ car la plus grande valeur d'adhérence de $(u_{n_k})_k$ est une des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$ donc inférieure ou égale à la plus grande valeur d'adhérence de $(u_n)_n$. D'où l'encadrement cherché et le résultat. $\square$

Théorème 3.9 (Critère de d'Alembert pour le rayon de convergence). *Considérons la série entière $\sum a_n x^n$. On suppose que*

1. *les coefficients a_n sont non nuls à partir d'un certain rang,*
2. *la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_n$ a une limite dans $[0, +\infty]$.*

Alors, le rayon de convergence vérifie

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|,$$

avec les conventions $1/0 = +\infty$ et $1/+\infty = 0$.

Preuve. C'est une conséquence directe de la formule

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \quad (3.1.2)$$

et du Théorème 3.8. On rappelle la preuve de (3.1.2) dans le cas où la limite ℓ de $|a_{n+1}/a_n|$ appartient à $]0, +\infty[$. Fixons $\epsilon > 0$ (avec $\ell - \epsilon > 0$). Pour $k \geq n_\epsilon$ assez grand, on a

$$\ell - \epsilon \leq \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq \ell + \epsilon.$$

En utilisant cet encadrement et en écrivant

$$|a_n| = \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|} \cdots \frac{|a_{n_\epsilon+1}|}{|a_{n_\epsilon}|} |a_{n_\epsilon}|,$$

on obtient

$$|a_{n_\epsilon}|^{\frac{1}{n}} (\ell - \epsilon)^{1 - \frac{n_\epsilon}{n}} \leq |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq (\ell + \epsilon)^{1 - \frac{n_\epsilon}{n}} |a_{n_\epsilon}|^{\frac{1}{n}}$$

et en passant à la limite supérieure, on obtient

$$\ell - \epsilon \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \ell + \epsilon.$$

Comme ϵ est arbitrairement petit, on peut le laisser tendre vers 0 et on obtient $\ell = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$. $\square$

Théorème 3.10. Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$. Sa somme est une fonction C^∞ sur $] -R, R[$ et peut-être dérivée sous le signe $\sum$, i.e.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Preuve. La série dérivée $\sum n a_n x^{n-1} = \sum_n (n+1) a_{n+1} x^n$ est une série entière qui a même rayon de convergence que $\sum a_n x^n$ puisque

$$|(n+1)a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} = (n+1)^{\frac{1}{n}} \left(|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}} \right)^{\frac{n+1}{n}}$$

où

$$(n+1)^{\frac{1}{n}} = \exp \left(\frac{\ln(n+1)}{n} \right) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow +\infty$$

et

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}} \right)^{\frac{n+1}{n}} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

En particulier, si $0 < R' < R$, la série dérivée converge uniformément sur $[-R', R']$. Comme par ailleurs la série converge simplement sur $[-R', R']$, elle est dérivable (avec dérivée obtenue en dérivant sous le signe $\sum$) sur $] -R', R'[$, d'après le Théorème 2.14. Comme tout point de $] -R, R[$ peut-être mis dans un intervalle $] -R', R'[$, la somme de la série est dérivable sur $] -R, R[$. Le caractère C^∞ s'obtient par une récurrence immédiate. $\square$

Corollaire 3.11. Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ dont on suppose le rayon non nul. Alors

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}.$$

Concernant l'intégrabilité sous le signe somme, elle est encore plus immédiate.

Théorème 3.12 (Primitivation d'une série entière). Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R \in]0, +\infty]$. Alors, sur $] -R, R[$, les primitives de sa somme sont

$$C + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = C + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

avec C constante arbitraire.

Preuve. Primitiver revient à intégrer sur l'intervalle $[0, x]$, avec $|x| < R$, qui est un intervalle compact contenu dans $] - R, R[$ donc sur lequel la série converge uniformément. Le résultat suit donc du Théorème 2.13. $\square$

3.2 Développement en série entière

A la fin de la section précédente, nous avons vu que la somme d'une série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ était de classe C^∞ sur $] - R, R[$ ($R =$ rayon de convergence) et que

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

On peut se poser réciproquement la question suivante : étant donnée une fonction f de classe C^∞ sur un voisinage de 0, l'identité

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

est-elle vraie sur un voisinage de 0, en particulier la série entière converge-t-elle ?

Le théorème suivant donne un critère.

Théorème 3.13. *Soit f une fonction C^∞ sur $] - A, A[$ avec $A > 0$. Supposons qu'il existe deux réels $\rho > 0$ et $C \geq 0$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in] - A, A[$*

$$|f^{(n)}(x)| \leq C \rho^n (n!).$$

Alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad \text{pour tout } |x| < \min \left\{ A, \frac{1}{\rho} \right\}$$

Preuve. On commence par utiliser la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et x qui donne

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \underbrace{\frac{x^{N+1}}{N!} \int_0^1 (1-t)^N f^{(N+1)}(tx) dt}_{R_N(x)}. \quad (3.2.3)$$

Puis, on majore

$$\begin{aligned} |R_N(x)| &\leq \frac{|x|^{N+1}}{N!} \int_0^1 (1-t)^N |f^{(N+1)}(tx)| dt \\ &\leq \frac{|x|^{N+1}}{N!} \int_0^1 (1-t)^N C \rho^{N+1} ((N+1)!) dt = C(|x|\rho)^{N+1} \end{aligned}$$

en utilisant que $\int_0^1 (1-t)^N dt = \frac{1}{N+1}$. Jusqu'ici, tout a un sens à la seule condition que $|x| < A$. Si on suppose en plus que $|x| < \frac{1}{\rho}$ alors $\rho|x| < 1$ et donc

$$|R_N(x)| \leq C(\rho|x|)^{N+1} \rightarrow 0, \quad \text{quand } N \rightarrow +\infty.$$

Revenant à (3.2.3), cela prouve le résultat. $\square$

Définition 3.14. Une fonction f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}$ est **développable en série entière en** ou **autour d'** un point $x_0 \in U$, si pour un $\epsilon > 0$ on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad \text{pour tout } x \in]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[.$$

Remarque importante. Quitte à considérer la fonction $\tilde{f}(y) = f(x_0 + y)$, dire que f est développable en série entière en x_0 est équivalent à dire que $\tilde{f}$ est développable en série entière en 0. Pour cette raison, un critère de développement en série entière en 0 est suffisant.

Théorème 3.15 (Reformulation du Théorème 3.13). Une fonction f C^∞ sur un voisinage de 0 est développable en série entière en 0 à la condition suffisante qu'il existe $A > 0$, $\rho > 0$ et $C \geq 0$ tels que

$$|f^{(n)}(x)| \leq C\rho^n(n!), \quad \text{pour tout } x \in]-A, A[.$$

Exemple. Si $f(x) = \frac{1}{1-x}$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{6}{(1-x)^4}$$

et par une récurrence simple

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

On en déduit que si $x \in]-1 + \delta, 1 - \delta[$ (avec $\delta \in]0, 1[$), on a

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{n!}{\delta^{n+1}}$$

et donc que f est développable en série entière en 0. Comme

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{(1-0)^{n+1}} = n!$$

on trouve (a priori sur un voisinage de 0 pour l'instant)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

i.e. la série géométrique bien connue. Si on suit, le Théorème 3.13, on voit que la convergence a lieu pourvu que

$$|x| < \min\{1 - \delta, \delta\}$$

qu'on peut optimiser en prenant $\delta = 1/2$. Néanmoins, la série converge sur $] -1, 1[$ donc l'estimation du rayon de convergence par $\min\{A, 1/\rho\}$ n'est en général pas optimale.

Contre-exemple. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

La fonction f **n'est pas** développable en série entière en 0. Pour le prouver, on vérifie d'abord que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ (ce qui est le plus délicat - cf tableau noir). Puis, on observe que

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

ce qui est évident en calculant par exemple les dérivées à gauche. Mais alors, si f était développable en série entière, on aurait sur un intervalle $] -\epsilon, \epsilon[$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$$

ce qui est manifestement faux pour $x \in]0, \epsilon[$.

3.3 Produit de Cauchy

Proposition 3.16. Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons respectifs non nuls R_a et R_b . Considérons la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Alors la série entière $\sum c_n x^n$ a un rayon de convergence R_c qui vérifie $R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$.

Preuve. Considérons $r < \min\{R_a, R_b\}$ et choisissons r' tel que

$$r < r' < \min\{R_a, R_b\}.$$

Posons $\rho = r/r' \in [0, 1[$, et notons $A > 0$, $B > 0$ des constantes telles que

$$|a_n r'^n| \leq A, \quad |b_n r'^n| \leq B \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors, en écrivant $r^n = \rho^n r'^n$, on en déduit que

$$|a_n r^n| \leq A \rho^n, \quad |b_n r^n| \leq B \rho^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (3.3.4)$$

Mais alors

$$\begin{aligned}
|c_n r^n| &= \left| \sum_{k=0}^n a_k r^k b_{n-k} r^{n-k} \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^n |a_k r^k| |b_{n-k} r^{n-k}| \\
&\leq \sum_{k=0}^n A \rho^k B \rho^{n-k} = (n+1)AB\rho^n
\end{aligned}$$

est clairement une suite bornée puisque $(n+1)AB\rho^n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. $\square$

Définition 3.17. La série $\sum c_n x^n$ définie ci-dessus s'appelle **produit de Cauchy** des séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$.

La terminologie s'explique par le résultat suivant.

Théorème 3.18. Avec les notations et hypothèses de la Proposition 3.16, pour tout x vérifiant $|x| < \min\{R_a, R_b\}$, on a

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n.$$

Preuve. Le membre de gauche de l'égalité est la limite quand $N \rightarrow +\infty$ de

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^N a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^N b_n x^n \right) &= \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^N a_{n_1} b_{n_2} x^{n_1+n_2} \\
&= \sum_{\substack{n_1, n_2 \leq N \\ n_1+n_2 \leq N}} a_{n_1} b_{n_2} x^{n_1+n_2} + \underbrace{\sum_{\substack{n_1, n_2 \leq N \\ n_1+n_2 > N}} a_{n_1} b_{n_2} x^{n_1+n_2}}_{=: R_N} \\
&= \sum_{n=0}^N c_n x^n + R_N,
\end{aligned}$$

de sorte qu'il suffit de prouver que $R_N \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow \infty$. En notant $r = |x|$, on obtient comme dans la preuve de la Proposition 3.16 l'existence de $\rho \in [0, 1[$ et $A, B > 0$ tels que (3.3.4) ait lieu. En particulier

$$\begin{aligned}
|R_N| &\leq \sum_{\substack{n_1, n_2 \leq N \\ n_1+n_2 > N}} |a_{n_1}| |b_{n_2}| r^{n_1+n_2} \\
&\leq \sum_{\substack{n_1, n_2 \leq N \\ n_1+n_2 > N}} AB \rho^{n_1+n_2} \\
&\leq AB \sum_{n=N+1}^{2N} (n+1) \rho^n \rightarrow 0 \quad N \rightarrow +\infty,
\end{aligned}$$

en utilisant que pour les $n_1, n_2 \leq N$, le nombre de couples tels que $n_1 + n_2 = n$ est au plus $n + 1$. D'où le résultat. $\square$

Exemple d'application. On définit e^z pour tout $z \in \mathbb{C}$ par

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!},$$

qui est une série entière de rayon $+\infty$ puisque

$$\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Grâce au Théorème 3.18, on va voir que pour tous $z, \zeta \in \mathbb{C}$

$$e^z e^\zeta = e^{z+\zeta}. \quad (3.3.5)$$

Pour cela, on définit $a_n = \frac{z^n}{n!}$ et $b_n = \frac{\zeta^n}{n!}$ de sorte que si on pose

$$S_a(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n, \quad S_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n Z^n$$

on a

$$e^z = S_a(1), \quad e^\zeta = S_b(1).$$

D'après le Théorème 3.18,

$$S_a(1)S_b(1) = S_c(1)$$

où

$$S_c(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n Z^n, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Or

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{\zeta^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} z^k \zeta^{n-k} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{C_n^k} z^k \zeta^{n-k} \\ &= \frac{1}{n!} (z + \zeta)^n \end{aligned}$$

donc

$$S_c(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + \zeta)^n}{n!} = e^{z+\zeta}.$$

Complément : π , sin et cos. On définit les fonctions sin et cos sur $\mathbb{R}$ par

$$\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix}), \quad \sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix}),$$

i.e.

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x).$$

En partant de la définition de la série exponentielle, on obtient

$$\overline{e^{ix}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{(ix)^n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ix)^n}{n!} = e^{-ix}.$$

On en déduit que

$$|e^{ix}|^2 = e^{ix} \overline{e^{ix}} = e^{ix} e^{-ix} = e^{ix-ix} = 1$$

ce qui donne la formule bien connue

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1. \quad (3.3.6)$$

Par ailleurs, $(e^{ix})' = ie^{ix} = i \cos(x) - \sin(x)$ donne

$$\cos'(x) = -\sin(x), \quad \sin'(x) = \cos(x).$$

Concernant les développements en série entière de cos et sin, on a

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n + (-ix)^n}{2(n!)} \end{aligned}$$

dont tous les termes correspondant à des n pairs disparaissent. On en déduit par un simple changement d'indice $n = 2k$ que

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

De façon similaire, on a

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

On va ensuite **définir** π et montrer la **2π -périodicité** de cos et sin.

Comme $\sin(x) = x \sin'(0) + o(x) = x + o(x)$ en 0, on a $\sin(x) > 0$ sur un intervalle de la forme $]0, \epsilon[$ avec $\epsilon > 0$.

Proposition 3.19 (Définition de π). *La fonction $\sin$ a au moins une racine strictement positive et on définit*

$$\pi = \inf\{x \geq \epsilon \mid \sin(x) = 0\}.$$

Autrement dit, π est la plus petite racine strictement positive de $\sin$.

Preuve. Si $\sin$ ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$, elle est de signe constant car continue, donc strictement positive. Comme $\cos'(x) = -\sin(x)$, la fonction $\cos$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et comme elle est minorée (par -1) d'après (3.3.6), elle a une limite en $+\infty$. Mais alors, par positivité de $\sin$, $\sin(x) = (1 - \cos^2(x))^{1/2}$ et donc $\sin$ a également une limite en $+\infty$. Notons

$$s = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x), \quad c = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x).$$

Comme $s^2 + c^2 = 1$ (par passage à la limite dans (3.3.6)), s et c ne peuvent pas être tous les deux nuls. Supposons pour fixer les idées que $c \neq 0$. Si $c < 0$, il existe alors $x_0 > 0$ tel que $\cos(x) < c/2$ pour tout $x \geq x_0$ ce qui implique en particulier

$$\sin(x) = \sin(x_0) - \int_{x_0}^x \cos(t) dt \geq \sin(x_0) - \frac{c}{2}(x - x_0) \rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow +\infty,$$

ce qui est impossible car $\sin$ est bornée. De même si $c > 0$, on voit que $\sin(x) \rightarrow -\infty$. Et si c'est s qui est non nulle, $\cos(x) \rightarrow \pm\infty$. Ceci est impossible donc $\sin$ s'annule sur $]0, +\infty[$. Puisque $\sin(x) > 0$ sur $]0, \epsilon[$, toute racine strictement positive est au moins égale à ϵ . L'ensemble $E = \{x \geq \epsilon \mid \sin(x) = 0\}$ est ainsi non vide et minoré, donc admet une borne inférieure (qui est supérieure ou égale à ϵ). Cette borne inférieure π vérifie $\sin(\pi) = 0$. En effet, on peut toujours trouver une suite d'éléments de E , $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui converge vers sa borne inférieure, donc par continuité de $\sin$ on a $\sin \pi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(x_n) = 0$ puisque $\sin(x_n) = 0$ pour chaque n . $\square$

D'après ce qui précède, $\sin(x) > 0$ pour tout $x \in]0, \pi[$ et donc $\cos$ est strictement décroissante sur $[0, \pi]$. En particulier, $\cos(\pi) < \cos(0) = 1$. Or $1 = \cos^2 \pi + \sin^2 \pi = \cos^2 \pi$, donc $\cos \pi = \pm 1$ et par suite $\cos \pi = -1$. On en déduit

$$e^{i\pi} = -1, \quad e^{2i\pi} = (e^{i\pi})^2 = 1.$$

Ceci implique que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{i(x+2\pi)} = e^{ix} e^{2i\pi} = e^{ix},$$

dont on tire la 2π -périodicité de $\cos$ et $\sin$.

3.4 Exponentielle d'une matrice

Commençons par rappeler que si a est une constante réelle (ou même complexe), l'équation différentielle du premier ordre à coefficients constants

$$f' = af$$

admet pour solutions sur $\mathbb{R}$

$$f(t) = Ce^{at},$$

où C est une constante arbitraire. Comme $C = f(0)$, on peut réécrire les solutions sous la forme

$$f(t) = e^{at}f(0). \quad (3.4.7)$$

Si maintenant on s'intéresse à un système d'équations différentielles (à coefficients réels ou complexes)

$$\begin{aligned} f_1'(t) &= a_{11}f_1(t) + a_{12}f_2(t) + \cdots + a_{1n}f_n(t) \\ &\vdots \\ f_n'(t) &= a_{n1}f_1(t) + a_{n2}f_2(t) + \cdots + a_{nn}f_n(t) \end{aligned}$$

qu'on réécrit sous forme matricielle

$$F'(t) = AF(t)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

On va montrer (et définir en quel sens) que les solutions vérifient

$$F(t) = \exp(tA)F(0)$$

qui est bien sûr analogue à (3.4.7), où l'exponentielle de matrice sera définie via

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k, \quad \text{où } A^0 = I_n.$$

On va commencer par justifier cette formule, i.e. l'existence d'une limite quand $N \rightarrow +\infty$ pour

$$\sum_{k=0}^N \frac{t^k}{k!} A^k.$$

On travaille sur $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) sur lequel on choisit une norme $\|\cdot\|$.

Définition 3.20. La norme matricielle associée à $\|\cdot\|$ est définie pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par

$$\|M\| = \sup_{\substack{X \in \mathbb{K}^n \\ X \neq 0}} \frac{\|MX\|}{\|X\|}.$$

Proposition 3.21. $||| \cdot |||$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En outre,

$$|||MN||| \leq |||M||| \ |||N|||,$$

pour toutes $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve. Déjà vue ailleurs ? □

On définit à présent la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ par

$$S_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad S_N(t) = \sum_{k=0}^N \frac{t^k}{k!} A^k.$$

Proposition 3.22. Pour tout $T > 0$, la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy uniforme sur $[-T, T]$, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_{T,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ tel que

$$|||S_N(t) - S_{N+p}(t)||| \leq \varepsilon, \quad \text{pour tous } t \in [-T, T], \ N \geq N_{T,\varepsilon}, \ p \in \mathbb{N}.$$

Preuve. Quels que soient N, p et t , on a

$$\begin{aligned} |||S_N(t) - S_{N+p}(t)||| &= \left| \left| \sum_{k=N+1}^{N+p} \frac{t^k}{k!} A^k \right| \right| \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{N+p} \frac{|t|^k}{k!} |||A^k||| \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{N+p} \frac{|t|^k}{k!} |||A|||^k \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{|t|^k}{k!} |||A|||^k \end{aligned}$$

et si on restreint t à $[-T, T]$,

$$|||S_N(t) - S_{N+p}(t)||| \leq \underbrace{\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{|T|^k}{k!} |||A|||^k}_{\text{reste de la serie } e^{T|||A|||}}.$$

Comme le membre de droite est $\leq \varepsilon$ pour tout N assez grand, on en déduit que le critère de Cauchy uniforme est satisfait. □

Il suit de cette proposition que la fonction $t \mapsto \exp(tA) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$ est continue sur $[-T, T]$ pour tout T , donc est en fait continue sur $\mathbb{R}$. En outre, on voit que

$$\begin{aligned} S'_N(t) &= \sum_{k=1}^N \frac{k t^{k-1}}{k!} A^k \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k \\ &= A \sum_{k=1}^N \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^{k-1} \\ &= A S_{N-1}(t). \end{aligned}$$

De cette identité, on déduit que

$$\begin{aligned} |||S'_N(t) - S'_{N+p}(t)||| &= |||A(S_{N-1}(t) - S_{N+p-1}(t))||| \\ &\leq |||A||| |||S_{N-1}(t) - S_{N+p-1}(t)||| \end{aligned}$$

donc que la suite $(S'_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est, pour chaque $T > 0$, de Cauchy uniforme sur $[-T, T]$ d'après la proposition ci-dessus. On en déduit que $t \mapsto \exp(tA)$ est C^1 sur $[-T, T]$ pour tout T donc sur $\mathbb{R}$ et

$$\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA).$$

Tout ceci montre le résultat suivant.

Théorème 3.23. *Si $V_0 \in \mathbb{K}^n$, $V(t) := \exp(tA)V_0$ vérifie*

$$V'(t) = AV(t), \quad V(0) = V_0.$$

Pour montrer que les solutions de $F'(t) = AF(t)$ sont nécessairement de la forme $F(t) = \exp(tA)F(0)$, on va utiliser le résultat suivant.

Proposition 3.24. *Pour tous $t, s \in \mathbb{R}$,*

$$\exp(tA) \exp(sA) = \exp((t+s)A), \quad \exp(0A) = I_n,$$

et en particulier

$$(\exp(tA))^{-1} = \exp(-tA).$$

En outre,

$$A \exp(tA) = \exp(tA)A.$$

Remarque. Ce théorème est un cas particulier du résultat plus général suivant (dont on pourra chercher la preuve en exercice) : si M et N sont deux matrices carrées de même taille et qui commutent, i.e. $MN = NM$, alors

$$\exp(M) \exp(N) = \exp(M + N).$$

Preuve. Elle suit la même technique que la preuve (3.3.5). Le fait que $\exp(0A) = I_n$ suit simplement de la convention $A^0 = I_n$. Enfin, le fait que A commute avec $\exp(tA)$ s'obtient par passage à la limite $N \rightarrow +\infty$ dans l'égalité

$$AS_N(t) = S_N(t)A$$

qui est évidente puisque A commute avec toute puissance de A . $\square$

Théorème 3.25. *Supposons que $t \mapsto F(t)$ soit une fonction C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}^n$ solution (sur $\mathbb{R}$) de*

$$F'(t) = AF(t).$$

Alors

$$F(t) = \exp(tA)F(0).$$

Preuve. Considérons $X(t) = \exp(-tA)F(t)$. Alors

$$\begin{aligned} X'(t) &= (\exp(-tA))' F(t) + \exp(-tA)F'(t) \\ &= -A \exp(-tA)F(t) + \exp(-tA)AF(t) \\ &= -\exp(-tA)AF(t) + \exp(-tA)AF(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $t \mapsto X(t)$ est constante sur $\mathbb{R}$ et

$$\exp(-tA)F(t) = X(t) = X(0) = F(0).$$

En appliquant $\exp(tA)$ à cette égalité, on obtient le résultat. $\square$

On conclut sur une dernière remarque sur le calcul explicite de $\exp(tA)$. On se limite au cas où la matrice A est diagonalisable, i.e. si elle peut s'écrire

$$A = PDP^{-1}, \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Remarquons d'abord que pour tout k entier

$$A^k = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1}) = PD^k P^{-1}$$

y compris pour $k = 0$. On en déduit que

$$\exp(tA) = P \exp(tD) P^{-1}.$$

Comme par ailleurs, toute puissance d'une matrice diagonale est encore diagonale, et plus précisément

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$$

on voit que

$$\exp(tD) = \text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}).$$

On en conclut

$$\exp(tA) = P \text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}) P^{-1}.$$

Chapitre 4

Séries de Fourier (4 semaines)

Dans ce chapitre, nous allons étudier des fonctions périodiques ; on se restreindra à des fonctions 2π -périodiques sans perte de généralité puisque si f est T périodique (avec $T > 0$) alors $\tilde{f}(x) = f(Tx/2\pi)$ est 2π -périodique. Nous allons en particulier étudier des conditions garantissant qu'une fonction 2π -périodique peut se développer en série

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}.$$

4.1 Séries trigonométriques

Définition 4.1. On appelle **série trigonométrique** toute série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ avec

$$f_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

les $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant des suites de nombres réels ou complexes.

La convergence (simple ou uniforme) d'une série trigonométrique correspond à la convergence de

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N f_n(x) &= \sum_{n=0}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \end{aligned}$$

quand $N \rightarrow +\infty$. Si $\sum_{n=0}^N a_n \cos(nx)$ et $\sum_{n=1}^N b_n \sin(nx)$ convergent, alors la série trigonométrique converge, mais pas clairement la réciproque. De plus, en réécrivant

$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = \frac{ie^{-inx} - ie^{inx}}{2}$$

on obtient facilement

$$\sum_{n=0}^N a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sum_{n=0}^N \left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) e^{inx} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2} \right) e^{-inx}$$

de sorte qu'en posant, pour $n \geq 1$,

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad c_0 = a_0,$$

la convergence de la série trigonométrique revient à la convergence de

$$\sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}.$$

Définition 4.2. On appelle *série exponentielle*, associée à la série trigonométrique, $\sum_n a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$, la suite (en N)

$$\sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

définie ci-dessus. En cas de convergence, on notera $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ sa limite quand $N \rightarrow +\infty$.

Proposition 4.3. Soit $a \in \mathbb{R}$. En notant δ_{nk} le symbole de Kronecker (valant 1 si $n = k$ et 0 sinon), on a, pour $n, k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} e^{ikx} e^{-inx} dx = \delta_{nk},$$

et pour $n, k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx = \delta_{nk} \quad \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} \sin(kx) \sin(nx) dx = \delta_{nk}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} \cos(kx) \sin(nx) dx = 0.$$

Preuve. Calculs élémentaires, en utilisant les formules de linéarisation usuelles

$$\begin{aligned} \cos(x) \cos(y) &= \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2} \\ \sin(x) \sin(y) &= \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} \\ \sin(x) \cos(y) &= \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2}. \end{aligned}$$

□

Remarque-Exercice. La proposition ci-dessus aurait pu n'être énoncée que pour $a = 0$, sans perte de généralité, en raison du résultat suivant qu'on laisse à titre d'exercice : si f est une fonction 2π -périodique continue par morceaux, alors

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_a^{a+2\pi} f(x)dx, \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

Proposition 4.4. 1. (**Version trigonométrique**) Supposons que la série

$$\sum_{n \geq 0} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

converge uniformément sur $[a, a + 2\pi]$ (ou de façon équivalente sur $\mathbb{R}$). On note sa somme $T(x)$. Alors

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} T(x)dx \quad (4.1.1)$$

et pour $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} T(x) \cos(nx)dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} T(x) \sin(nx)dx. \quad (4.1.2)$$

2. (**Version exponentielle**) Supposons que la série

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

converge uniformément sur $[a, a + 2\pi]$. On note $E(x)$ sa somme. Alors,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} E(x) e^{-inx} dx,$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Preuve. 1. Par convergence uniforme sur $[a, a + 2\pi]$,

$$\int_a^{a+2\pi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^{a+2\pi} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) dx$$

où, si $k \neq 0$,

$$\int_a^{a+2\pi} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) dx = \left[\frac{a_k}{k} \sin(kx) - \frac{b_k}{k} \cos(kx) \right]_a^{a+2\pi} = 0$$

et, si $n = 0$,

$$\int_a^{a+2\pi} a_0 dx = 2\pi a_0.$$

Ceci prouve (4.1.1). De même, la convergence uniforme permet de permuter $\int_a^{a+2\pi}$ et $\sum_{n=0}^{\infty}$, donc

$$\begin{aligned} \int_a^{a+2\pi} T(x) \cos(nx) dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^{a+2\pi} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \cos(nx) dx \\ \int_a^{a+2\pi} T(x) \sin(nx) dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^{a+2\pi} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \sin(nx) dx \end{aligned}$$

et en utilisant la Proposition 4.3, on obtient (4.1.2). La preuve de 2 est similaire. $\square$

4.2 Coefficients et séries de Fourier

Étant donnée une fonction **continue par morceaux** et 2π **périodique** f , on voudrait savoir si elle peut s'écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

ou

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}.$$

La Proposition 4.4 suggère d'introduire les coefficients suivants.

Définition 4.5. *Les coefficients de Fourier trigonométriques de f sont*

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Les coefficients de Fourier exponentiels de f sont

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

La **série de Fourier trigonométrique** de f est $\sum_{n \geq 0} a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)$ et la **série de Fourier exponentielle** de f est $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$.

Théorème 4.6. *Supposons que*

1. *f soit continue en un point x_0 ,*
2. *la série de Fourier de f en x_0 converge.*

Alors

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx_0} \\ &= a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nx_0) + b_n(f) \sin(nx_0). \end{aligned}$$

Preuve. Pour fixer les idées, on considère la série exponentielle. La seconde hypothèse dit que la suite numérique

$$e_N = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx_0}$$

est convergente, vers une limite qu'on note ℓ . Le but est de montrer que $\ell = f(x_0)$. Comme e_N converge vers ℓ , elle converge également au sens de Césaro vers ℓ , ie la suite

$$E_N = \frac{e_0 + e_1 + e_2 + \cdots + e_{N-1}}{N}$$

converge elle aussi vers ℓ . Pour montrer le résultat, on a besoin des outils suivants.

Définition 4.7. *On appelle **noyau de Dirichlet** (à l'ordre N) la fonction*

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx},$$

*et **noyau de Fejer** (à l'ordre N), la fonction*

$$F_N = \frac{D_0 + \cdots + D_{N-1}}{N}.$$

Lemme 4.8. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$D_N(x) = \frac{\sin((2N+1)x/2)}{\sin(x/2)} \quad \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \quad D_N(x) = 2N+1 \quad \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z}$$

et

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2 \quad \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \quad F_N(x) = N \quad \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

En outre,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) dx = 1.$$

Preuve du lemme. Supposons $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors

$$\begin{aligned}
 D_N(x) &= e^{-iNx} (1 + e^{ix} + \cdots + e^{2iNx}) \\
 &= e^{-iNx} \frac{e^{i(2N+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \\
 &= e^{-iNx} \underbrace{\frac{e^{i(2N+1)x/2}}{e^{ix/2}}}_{=1} \frac{e^{i(2N+1)x/2} - e^{-i(2N+1)x/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \\
 &= \frac{\sin((2N+1)x/2)}{\sin(x/2)}.
 \end{aligned}$$

Le cas $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ est évident. En outre, en utilisant que $\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx = 0$ si $n \neq 0$, on voit trivialement que $\int_{-\pi}^{\pi} D_N = 2\pi$. En utilisant que, pour $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$D_j(x) = \frac{1}{\sin(x/2)} \operatorname{Im} \left(e^{i(2j+1)x/2} \right),$$

le calcul de $F_N(x)$ se fait de façon similaire, via

$$F_N(x) = \frac{1}{N \sin(x/2)} \operatorname{Im} \left(\sum_{j=0}^{N-1} e^{i(2j+1)x/2} \right).$$

Le cas $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ est laissé au lecteur. Enfin, comme tous les D_j sont d'intégrale 2π (sur $[-\pi, \pi]$), il en est de même pour F_N . $\square$

Fin de la preuve du Théorème 4.6. Remarquons que

$$\begin{aligned}
 e_N = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx_0} &= \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} e^{inx_0} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left(\sum_{n=-N}^N e^{in(x_0-x)} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_N(x_0 - x) dx.
 \end{aligned}$$

Mais alors

$$\begin{aligned}
 E_N = \frac{e_0 + \cdots + e_{N-1}}{N} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{D_0(x_0 - x) + \cdots + D_{N-1}(x_0 - x)}{N} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) F_N(x_0 - x) dx.
 \end{aligned}$$

Puis, on écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) F_N(x_0 - x) dx &= \frac{-1}{2\pi} \int_{x_0}^{x_0 - 2\pi} f(x_0 - y) F_N(y) dy & (y = x_0 - x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - y) F_N(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - y) F_N(y) dy. \end{aligned}$$

Comme par ailleurs $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N = 1$, on a également

$$f(x_0) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(y) dy \right) f(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0) F_N(y) dy$$

on obtient

$$E_N - f(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0 - y) - f(x_0)) F_N(y) dy.$$

Fixons alors $\epsilon > 0$. Par continuité de f en x_0 , il existe $\delta > 0$ tel que

$$|f(x_0 - y) - f(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{quel que soit } y \in [-\delta, \delta].$$

Par ailleurs, d'après le lemme 4.8,

$$|F_N(y)| = F_N(y) \leq \frac{1}{N \sin^2(\delta/2)} \quad \text{pour tout } \delta < |y| \leq \pi.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} |E_N - f(x_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x_0 - y) - f(x_0)| F_N(y) dy \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |f(x_0 - y) - f(x_0)| F_N(y) dy \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} F_N(y) dy \right) + \frac{2\|f\|_{\infty}}{N \sin^2(\delta/2)} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{2\|f\|_{\infty}}{N \sin^2(\delta/2)}, \end{aligned}$$

puisque, par positivité de F_N , $\int_{-\delta}^{\delta} F_N \leq \int_{-\pi}^{\pi} F_N = 2\pi$. Comme le deuxième terme à droite tend vers 0 quand N tend vers l'infini, il existe N_{ϵ} tel que pour tout $N \geq N_{\epsilon}$,

$$|E_N - f(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

On vient exactement de montrer que $E_N \rightarrow f(x_0)$ quand $N \rightarrow \infty$. D'où le résultat. $\square$

Proposition 4.9 (Lemme de Riemann-Lebesgue). *Soit f une fonction Riemann intégrable sur un intervalle $[a, b]$. Alors*

$$\int_a^b e^{ix\xi} f(x) dx \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow \infty.$$

En particulier,

$$\int_a^b \cos(x\xi) f(x) dx \rightarrow 0, \quad \int_a^b \sin(x\xi) f(x) dx \rightarrow 0$$

quand $\xi \rightarrow \infty$.

Preuve. 1ère étape. Si f est en escalier : soit $a = x_0 < \dots < x_N = b$ une subdivision associée à f . On note c_k la constante à laquelle f est égale sur $]x_k, x_{k+1}[$ (pour chaque $k \in \{0, \dots, N-1\}$). Alors, pour $\xi \neq 0$,

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{ix\xi} f(x) dx &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} e^{ix\xi} dx \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k \left[\frac{e^{ix\xi}}{i\xi} \right]_{x_k}^{x_{k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k \frac{e^{ix_{k+1}\xi} - e^{ix_k\xi}}{i\xi}, \end{aligned}$$

et on en déduit, avec

$$C = 2 \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|,$$

que

$$\left| \int_a^b e^{ix\xi} f(x) dx \right| \leq \frac{C}{|\xi|} \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow \infty.$$

2ème étape. Soit $\epsilon > 0$. Par Riemann intégrabilité de f (qu'on suppose sans perte de généralité à valeurs réelles), il existe deux fonctions en escalier $f_{\pm}$ telles que $f_- \leq f \leq f_+$ et

$$0 \leq \int_a^b f_+(x) - f_-(x) dx < \frac{\epsilon}{2}.$$

Comme $|f - f_+| = f_+ - f \leq f_+ - f_-$, on a

$$\int_a^b |f(x) - f_+(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b e^{ix\xi} f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b e^{ix\xi} (f(x) - f_+(x)) dx + \int_a^b e^{ix\xi} f_+(x) dx \right| \\
&\leq \left| \int_a^b e^{ix\xi} (f(x) - f_+(x)) dx \right| + \left| \int_a^b e^{ix\xi} f_+(x) dx \right| \\
&\leq \int_a^b |f(x) - f_+(x)| dx + \left| \int_a^b e^{ix\xi} f_+(x) dx \right| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{C_+}{|\xi|}
\end{aligned}$$

pour une certaine constante $C_+ \geq 0$. En particulier, il existe $R > 0$ tel que pour tout $|\xi| > R$, $C_+/|\xi| < \epsilon/2$ et donc

$$\left| \int_a^b e^{ix\xi} f(x) dx \right| < \epsilon, \quad \text{pour tout } |\xi| > R.$$

D'où le résultat. $\square$

Théorème 4.10 (Théorème de Dirichlet). *Soit f une fonction 2π -périodique (continue par morceaux) et x_0 un point où*

1. *les limites à droite et à gauche*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell_-, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell_+$$

existent (et sont finies),

2. *les limites*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - \ell_-}{x - x_0}, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - \ell_+}{x - x_0}$$

existent (et sont finies).

Alors, la série de Fourier de f en x_0 converge vers $\frac{\ell_- + \ell_+}{2}$.

Corollaire 4.11. *Si f est 2π -périodique, continue par morceaux, et x_0 un point où f est continue et dérivable à droite et à gauche, alors $f(x_0)$ et sa série de Fourier en x_0 sont égales.*

Preuve du théorème de Dirichlet. On considère la série de Fourier exponentielle $S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx}$ qui s'écrit

$$\begin{aligned}
S_N(x) &= \sum_{n=-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) e^{inx} \\
&= \sum_{n=-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{in(x-y)} dy \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-y) f(y) dy
\end{aligned}$$

où D_N est le noyau de Dirichlet (Définition 4.7). Par le changement de variable $x - y = z$, puis par 2π -périodicité, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-y)f(y)dy &= \int_{x-\pi}^{x+\pi} D_N(z)f(x-z)dz \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} D_N(z)f(x-z)dz. \end{aligned}$$

Comme par ailleurs, D_N est d'intégrale 2π sur $[-\pi, \pi]$ (Lemme 4.8) et paire, il est d'intégrale π sur $[-\pi, 0]$ et $[0, \pi]$ on a donc

$$\frac{\ell_+ + \ell_-}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 D_N(z)\ell_+ dz + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_N(z)\ell_- dz.$$

On en déduit

$$S_N(x_0) - \frac{\ell_- + \ell_+}{2} = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 D_N(z)(f(x_0 - z) - \ell_+) dz + \int_0^{\pi} D_N(z)(f(x_0 - z) - \ell_-) dz \right) \quad (4.2.3)$$

On va montrer que chacune des deux intégrales ci-dessus tend vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$. Pour fixer les idées, on se concentre sur la première. Commençons par observer qu'il existe $\delta_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $z \in]-\delta_0, 0[$,

$$\left| \frac{f(x_0 - z) - \ell_+}{z} \right| \leq C.$$

Si on choisit $0 < \delta \leq \delta_0$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\delta}^0 D_N(z)(f(x_0 - z) - \ell_+) dz \right| &\leq C \int_{-\delta}^0 |z D_N(z)| dz \\ &\leq C \int_{-\delta}^0 \left| \frac{z}{\sin(z/2)} \sin((2N+1)z/2) \right| dz \\ &\leq C \int_{-\delta}^0 \left| \frac{z}{\sin(z/2)} \right| dz. \end{aligned}$$

Comme par ailleurs, $u/\sin(u)$, prolongée par 1 en 0 est continue au voisinage de 0, elle est bornée sur un voisinage de 0. On en déduit l'existence de C' telle que, pour tout δ assez petit

$$\int_{-\delta}^0 \left| \frac{z}{\sin(z/2)} \right| dz \leq 2C' \int_{-\delta}^0 dz = 2C'\delta.$$

On en déduit

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^0 D_N(z)(f(x_0 - z) - \ell_+) dz \right| \leq \frac{CC'}{\pi} \delta,$$

et ce uniformément par rapport à N . A $\epsilon > 0$ fixé, on peut ainsi choisir $\delta > 0$ assez petit, pour que

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^0 D_N(z)(f(x_0 - z) - \ell_+) dz \right| \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{pour tout } N \in \mathbb{N}. \quad (4.2.4)$$

On écrit l'autre partie de l'intégrale comme

$$\int_{-\pi}^{-\delta} D_N(z)(f(x_0 - z) - \ell_+) dz = \int_{-\pi}^{-\delta} \sin((2N+1)z/2) \frac{f(x_0 - z) - \ell_+}{\sin(z/2)} dz$$

où la fonction $z \mapsto (f(z - x_0) - \ell_+)/\sin(z/2)$ est continue par morceaux sur $[-\pi, -\delta]$, puisque la fonction $\sin$ ne s'annule pas sur $[-\pi/2, -\delta/2]$. Par le lemme de Riemann-Lebesgue, l'intégrale à droite tend vers 0 quand N tend vers l'infini, et donc il existe N_ϵ tel que

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} D_N(z)(f(x_0 - z) - \ell_+) dz \right| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{pour tout } N \geq N_\epsilon. \quad (4.2.5)$$

Ainsi (4.2.4) et (4.2.5) montrent que la première intégrale (à droite) de (4.2.3) tend vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$. On procède de même pour la seconde et on obtient le résultat. $\square$

Le théorème de Dirichlet donne un critère pour déterminer la valeur de la série de Fourier en un point, et en particulier pour savoir si la série de Fourier associée à une fonction converge simplement vers cette fonction. Nous allons voir des conditions garantissant que la convergence est uniforme. Voici un critère simple (il sera amélioré dans la section suivante).

Théorème 4.12. *Soit f une fonction C^{k+2} sur $\mathbb{R}$, avec $k \in \mathbb{N}$, et 2π périodique. Alors, il existe $C > 0$ telle que,*

$$|a_n(f)| \leq \frac{C}{(n+1)^{k+2}}, \quad |b_n(f)| \leq \frac{C}{(n+1)^{k+2}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

et

$$|c_n(f)| \leq \frac{C}{(|n|+1)^{k+2}}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

En particulier, la série de Fourier de f converge normalement donc uniformément vers f sur $[-\pi, \pi]$ (ou de façon équivalente sur $\mathbb{R}$). En fait, pour tout $j \in \{0, \dots, k\}$

$$\sum_{n=-N}^N c_n(f) \frac{d^j}{dx^j} e^{inx}$$

converge normalement vers $f^{(j)}$ sur $[-\pi, \pi]$. Il en est de même pour la série écrite sous forme trigonométrique.

On va utiliser un lemme, que l'on isole car il peut être utile dans d'autres contextes.

Lemme 4.13. *Si f est une fonction C^1 et 2π périodique sur $\mathbb{R}$, alors*

$$na_n(f) = -b_n(f'), \quad nb_n(f) = a_n(f'), \quad nc_n(f) = -ic_n(f'),$$

pour tout n entier (dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ selon qu'on considère les coefficients trigonométriques ou exponentiels).

Preuve. Elle consiste simplement à faire des intégrations par partie. On traite le cas des coefficients exponentiels $c_n(f)$, les autres sont laissés à titre d'exercice. On commence par remarquer que

$$nc_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) ne^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) i \frac{d}{dx} (e^{-inx}) dx$$

et donc, en intégrant par partie

$$nc_n(f) = \frac{i}{2\pi} [e^{-inx} f(x)]_{-\pi}^{\pi} - \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx = \frac{i}{2\pi} (e^{-in\pi} f(\pi) - e^{in\pi} f(-\pi)) - ic_n(f')$$

ce qui donne le résultat puisque la parenthèse est nulle par 2π -périodicité. $\square$

Preuve du Théorème 4.12. On fait la preuve dans le cas des coefficients exponentiels (le cas des coefficients trigonométriques est analogue et laissé en exercice). En vertu du lemme ci-dessus

$$(in)^{2+k} c_n(f) = (in)^{1+k} c_n(f') = (in)^k c_n(f'') = \dots = c_n(f^{(2+k)})$$

donc, pour $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$|c_n(f)| = \frac{1}{|n|^{2+k}} |c_n(f^{(2+k)})| = \frac{1}{2\pi |n|^{2+k}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f^{(2+k)}(x) e^{-inx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi |n|^{2+k}} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(2+k)}(x)| dx$$

Comme $\frac{1}{|n|} \leq \frac{2}{|n|+1}$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$, et que par ailleurs,

$$|c_0(f)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx$$

on en déduit l'existence de C en prenant par exemple

$$C = \max \left(\frac{2^{2+k}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(2+k)}(x)| dx, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \right).$$

La série des dérivées à l'ordre j est

$$\sum_n c_n(f) \frac{d^j}{dx^j} e^{inx} = \sum_n c_n(f) (in)^j e^{inx}$$

où

$$|c_n(f) (in)^j e^{inx}| = |c_n(f)| |n|^j \leq \frac{C}{(1+|n|)^2}$$

montre sa convergence normale. Comme par ailleurs, la série (non dérivée) converge simplement vers f d'après le Théorème de Dirichlet, on obtient le résultat. $\square$

4.3 Méthodes préhilbertiennes

L'objectif principal de cette partie est de prouver le théorème suivant.

Théorème 4.14 (Égalité de Parseval). *Si f est une fonction continue par morceaux et 2π -périodique (à valeurs réelles ou complexes), alors*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \\ &= |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \end{aligned}$$

i.e. les séries à droite sont convergentes et égales à l'intégrale à gauche.

Nous allons commencer par considérer le cas des fonctions C^1 .

4.3.1 Fonctions de classe C^1

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction de classe C^1 , 2π -périodique, et

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx}.$$

Proposition 4.15. S_N converge uniformément vers f sur $[-\pi, \pi]$.

Preuve. On reprend la preuve du Théorème de Dirichlet pour donner une expression de $S_N(x) - f(x)$,

$$S_N(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(z) (f(x-z) - f(x)) dz.$$

Notons qu'il n'est pas utile de décomposer en $[-\pi, 0] \cup [0, \pi]$ car la fonction est continue, donc les limites à droite et à gauche en x sont égales. Fixons $\epsilon > 0$. Comme

$$|f(x-z) - f(x)| \leq \|f'\|_{\infty} |z|, \quad \|f'\|_{\infty} = \sup_{[-\pi, \pi]} |f'(y)| = \sup_{\mathbb{R}} |f'(y)|.$$

Par conséquent, pour tout $0 < \delta < \pi$ et tout $x \in [-\pi, \pi]$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} D_N(z) (f(x-z) - f(x)) dz \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |D_N(z) (f(x-z) - f(x))| dz \\ &\leq \frac{\|f'\|_{\infty}}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |z D_N(z)| dz \\ &\leq \frac{\|f'\|_{\infty}}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{|z|}{|\sin(z/2)|} dz \end{aligned}$$

et comme $|z|/|\sin(z/2)|$ est bornée (par une constante C) sur $[-\pi, \pi]$ (car se prolonge par continuité en 0 par 2), on en déduit que, pour tout N ,

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} D_N(z)(f(x-z) - f(x))dz \right| \leq \frac{\|f'\|_{\infty}}{\pi} C\delta, \quad \text{pour tous } x \in [-\pi, \pi] \text{ et } \delta \in]0, \pi].$$

En particulier, si δ est assez petit,

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} D_N(z)(f(x-z) - f(x))dz \right| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (4.3.6)$$

Considérons à présent, l'autre partie de l'intégrale i.e

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} D_N(z)(f(x-z) - f(x))dz + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} D_N(z)(f(x-z) - f(x))dz.$$

Pour fixer les idées on considère celle sur $[-\pi, -\delta]$, la seconde se traitera de la même façon. On intègre par partie en utilisant que

$$\sin((2N+1)z/2) = -\frac{2}{2N+1} \frac{d}{dz} \cos((2N+1)z/2)$$

et on obtient la somme du terme intégré

$$-\frac{1}{\pi(2N+1)} \left[\frac{\cos((2N+1)z/2)}{\sin(z/2)} (f(x-z) - f(x)) \right]_{-\delta}^{-\pi}$$

et de l'intégrale

$$\frac{1}{\pi(2N+1)} \int_{-\pi}^{-\delta} \cos((2N+1)z/2) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f(x-z) - f(x)}{\sin(z/2)} \right) dz.$$

En valeur absolue, le terme intégré donne

$$\left| \frac{\cos((2N+1)\delta/2)}{\pi(2N+1)} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\sin(\delta/2)} \right| \leq \frac{2\|f\|_{\infty}}{\pi \sin(\delta/2)} \frac{1}{2N+1}$$

pour tout $x \in [-\pi, \pi]$. Dans l'intégrale restante, la dérivée (en valeur absolue) s'écrit et s'estime de la façon suivante

$$\left| -\frac{f'(x-z)}{\sin(z/2)} - \frac{(f(x-z) - f(x)) \cos(z/2)}{2 \sin^2(z/2)} \right| \leq \frac{\|f'\|}{\sin(\delta/2)} + \frac{\|f\|_{\infty}}{\sin^2(\delta/2)},$$

pour tous $x \in [-\pi, \pi]$ et $z \in [\pi, -\delta]$. On en déduit l'existence d'une constante, dépendant de δ et f , telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} D_N(z)(f(x-z) - f(x))dz \right| \leq \frac{C}{2N+1},$$

qui est inférieur à $\epsilon/4$ pour N assez grand. Il en est bien sûr de même pour l'intégrale de δ à π . Avec (4.3.6), on en déduit que $\|S_N - f\|_\infty < \epsilon$ pour N assez grand, i.e que S_N converge uniformément vers f . $\square$

Pour f, g continues et 2π périodiques, on note

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} g(x) dx$$

et

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Notons $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des fonctions continues (à valeurs complexes) et 2π -périodiques.

Proposition 4.16. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{P}$ et $\|\cdot\|_2$ est la norme associée.

Preuve. Laissée en exercice pour l'instant (sera revue à la fin du chapitre). $\square$

Preuve de l'égalité de Parseval dans le cas C^1 . Notons $e_j(x) = e^{ijx}$ et commençons par calculer

$$\begin{aligned} \|S_N\|_2^2 &= \langle S_N, S_N \rangle \\ &= \left\langle \sum_{j=-N}^N c_j(f) e_j, \sum_{k=-N}^N c_k(f) e_k \right\rangle \\ &= \sum_{j=-N}^N \sum_{k=-N}^N \overline{c_j(f)} c_k(f) \langle e_j, e_k \rangle \\ &= \sum_{j=-N}^N \sum_{k=-N}^N \overline{c_j(f)} c_k(f) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{ijx}} e^{ikx} dx \\ &= \sum_{j=-N}^N \sum_{k=-N}^N \overline{c_j(f)} c_k(f) \delta_{jk} \\ &= \sum_{j=-N}^N |c_j(f)|^2 \end{aligned}$$

en utilisant la Proposition 4.3 à l'avant-dernière ligne. Par ailleurs, en utilisant que $\|\cdot\|_2$ est une norme, la deuxième inégalité triangulaire nous donne

$$|\|f\|_2 - \|S_N\|_2| \leq \|f - S_N\|_2. \quad (4.3.7)$$

Enfin, on observe que

$$\begin{aligned} \|f - S_N\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(x)|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f - S_N\|_\infty^2 dx = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \right) \|f - S_N\|_\infty^2 \end{aligned}$$

et donc

$$\|f - S_N\|_2 \leq \|f - S_N\|_\infty.$$

D'après la Proposition 4.15, $\|f - S_N\|_\infty \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow \infty$, et il en est de même pour $\|f - S_N\|_2$ en vertu de l'inégalité ci-dessus. On déduit de (4.3.7) que

$$\|S_N\|_2^2 \rightarrow \|f\|_2^2 \quad \text{quand } N \rightarrow +\infty,$$

ce qui est exactement le résultat. $\square$

Corollaire 4.17. *Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et toute fonction C^1 2π périodique,*

$$\sum_{n=-N}^N |c_n(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

Preuve. C'est une conséquence évidente du fait que

$$\sum_{n=-N}^N |c_n(f)|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx,$$

l'inégalité venant la positivité des termes de la série, et l'égalité étant celle de Parseval (qu'on vient de prouver pour les fonctions C^1). $\square$

4.3.2 Fonctions en escalier

On va dans ce paragraphe prouver l'égalité de Parseval pour les fonctions en escalier.

Lemme 4.18. *Pour tout $\epsilon > 0$ et toute fonction en escalier 2π -périodique f , il existe une fonction C^1 2π -périodique f_ϵ telle que*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_\epsilon(x)|^2 dx < \epsilon.$$

En particulier, si on choisit une suite strictement positive $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui tend vers 0 et si on pose

$$f_k = f_{\epsilon_k},$$

alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_k(x)|^2 dx \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty.$$

Preuve. Nous allons utiliser la remarque suivante. Considérons une subdivision de $[-\pi, \pi]$, $x_0 < \dots < x_n$ et deux intervalles consécutifs $]x_{k-1}, x_k[$ et $]x_k, x_{k+1}[$. Si la fonction f vaut

a sur l'intervalle $]x_{k-1}, x_k[$ et b sur $]x_k, x_{k+1}[$, alors pour chaque $\delta > 0$ assez petit (par rapport à la taille des intervalles), la fonction

$$g(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \in]x_{k-1}, x_k - \delta[\\ \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2\delta}(x - x_k)\right) & \text{si } x \in [x_k - \delta, x_k + \delta] \\ b & \text{si } x \in]x_k + \delta, x_{k+1}[\end{cases}$$

est de classe C^1 sur $]x_{k-1}, x_{k+1}[$. En outre, g est égale à f sur $]x_{k-1}, x_{k+1}[\setminus [x_k - \delta, x_k + \delta]$. Pour vérifier le caractère C^1 , disons en $x_k - \delta$, on observe que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_k - \delta \\ x < x_k - \delta}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_k - \delta \\ x < x_k - \delta}} a = a,$$

et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_k - \delta \\ x > x_k - \delta}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_k - \delta \\ x < x_k - \delta}} \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2\delta}(x - x_k)\right) = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} = a$$

qui donne la continuité, puis

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_k - \delta \\ x < x_k - \delta}} g'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_k - \delta \\ x < x_k - \delta}} 0 = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_k - \delta \\ x > x_k - \delta}} g'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_k - \delta \\ x < x_k - \delta}} \frac{b-a}{2} \frac{\pi}{2\delta} \cos\left(\frac{\pi}{2\delta}(x - x_k)\right) = 0$$

qui garantit le caractère C^1 en $x_k - \delta$ (où la dérivée est nulle). Suite sur tableau noir. $\square$

Lemme 4.19 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Si g et h sont des fonctions continues par morceaux sur $[-\pi, \pi]$,*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)h(x)| dx \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |h(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Preuve. On rappelle (?) la technique classique : considérer la fonction de t

$$\varphi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} (|g(x)| + t|h(x)|)^2 dx = \underbrace{\left(\int |g|^2 \right)}_{=:c} + \underbrace{\left(2 \int |g||h| \right)}_{=:b} t + \underbrace{\left(\int |h|^2 \right)}_{=:a} t^2$$

i.e. $\varphi(t) = at^2 + bt + c$. Par définition de φ , c'est une fonction positive (intégrale d'une fonction positive). Si $a \neq 0$, c'est un trinôme du second degré, et comme il a au plus une racine réelle, son discriminant est négatif, i.e.

$$0 \geq b^2 - 4ac = 4 \left(\left(\int |g||h| \right)^2 - \int |g|^2 \int |h|^2 \right)$$

qui donne le résultat. Si $a = 0$, alors la positivité de φ impose que $b = 0$ (sinon φ pourrait changer de signe) et le résultat est alors trivialement vrai. $\square$

Lemme 4.20 (Quasi inégalité triangulaire). *Si g et h sont des fonctions continues par morceaux sur $[-\pi, \pi]$, alors*

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x) + h(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_{-\pi}^{\pi} |h(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

et

$$\left| \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx \right)^{1/2} - \left(\int_{-\pi}^{\pi} |h(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right| \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - h(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Ce lemme serait trivial si on savait que $\|\cdot\|_2$ définissait une norme sur les fonctions continues par morceaux, mais ce n'est malheureusement pas le cas. La preuve suit néanmoins la même méthode

Preuve. Pour simplifier l'écriture, on supprime les bornes, les x et les dx dans les intégrales.

$$\begin{aligned} \int |g + h|^2 &\leq \int (|g| + |h|)^2 = \int |g|^2 + \int |h|^2 + 2 \int |g||h| \\ &\leq \int |g|^2 + \int |h|^2 + 2 \left(\int |g|^2 \right)^{1/2} \left(\int |h|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Cela se réécrit

$$\int |g + h|^2 \leq \left[\left(\int |g|^2 \right)^{1/2} + \left(\int |h|^2 \right)^{1/2} \right]^2$$

et en prenant la racine carrée,

$$\left(\int |g + h|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int |g|^2 \right)^{1/2} + \left(\int |h|^2 \right)^{1/2}.$$

En remplaçant g par $g - h$, on en déduit

$$\left(\int |g|^2 \right)^{1/2} - \left(\int |h|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int |g - h|^2 \right)^{1/2}.$$

On peut également échanger les rôles de g et h , ce qui permet de prendre la valeur absolue à gauche et donne le résultat. $\square$

Dans ce qui suit, on fixe une fonction en escalier f 2π -périodique et $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions C^1 comme dans le Lemme 4.18.

Proposition 4.21. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$,*

$$|c_n(f - f_k)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_k(x)|^2 dx.$$

Preuve. On écrit

$$\begin{aligned}
 |c_n(f - f_k)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f_k(x)) e^{-inx} dx \right| \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|f(x) - f_k(x)|}_{=: |g(x)|} \times \underbrace{1}_{=: |h(x)|} dx \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_k(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx \right)^{1/2}
 \end{aligned}$$

et en élevant cette inégalité au carré, on obtient le résultat. $\square$

Proposition 4.22. *Considérons $N \in \mathbb{N}$ et f en escalier sur $[-\pi, \pi]$. Alors*

$$\sum_{n=-N}^N |c_n(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Preuve. D'après le Corollaire 4.17, on a

$$\sum_{n=-N}^N |c_n(f_k)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_k(x)|^2 dx. \quad (4.3.8)$$

D'après la Proposition précédente,

$$|c_n(f) - c_n(f_k)| = |c_n(f - f_k)| \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_k(x)|^2 dx \right)^{1/2} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Ainsi, pour chaque n , $c_n(f_k) \rightarrow c_n(f)$ quand $k \rightarrow \infty$ et donc, à N fixé,

$$\sum_{n=-N}^N |c_n(f_k)|^2 \rightarrow \sum_{n=-N}^N |c_n(f)|^2, \quad k \rightarrow +\infty.$$

D'un autre côté, d'après la quasi inégalité triangulaire

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \int_{-\pi}^{\pi} |f_k(x)|^2 dx \right| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

On obtient le résultat en faisant tendre k vers l'infini dans (4.3.8). $\square$

Preuve de l'égalité de Parseval pour les fonctions en escaliers. La suite (en N) $\sum_{n=-N}^N |c_n(f)|^2$ est croissante (évident à cause des termes positifs) et majorée, d'après la Proposition 4.22. Cette suite est donc convergente, et en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Ensuite, en appliquant le Corollaire 4.17 à la fonction $f_j - f_k$

$$\sum_{|n| \leq N} |c_n(f_j - f_k)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_j(x) - f_k(x)|^2 dx$$

et en faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient

$$\sum_{|n| \leq N} |c_n(f_j - f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_j(x) - f(x)|^2 dx$$

puisque $c_n(f_k) - c_n(f) = c_n(f_k - f) \rightarrow 0$ d'après la Proposition 4.21 et

$$\left(\int |f_j - f|^2 \right)^{1/2} - \left(\int |f - f_k|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int |f_j - f_k|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int |f_j - f|^2 \right)^{1/2} + \left(\int |f - f_k|^2 \right)^{1/2}.$$

On en déduit que, pour chaque N et chaque j ,

$$\left| \left(\sum_{|n| \leq N} |c_n(f)|^2 \right)^{1/2} - \left(\sum_{|n| \leq N} |c_n(f_j)|^2 \right)^{1/2} \right| \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_j(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

puisque, en utilisant que $|Z|_2 = (|z_{-N}|^2 + \dots + |z_N|^2)^{1/2}$ est une norme sur $\mathbb{C}^{2N+1}$, on a

$$||Z|_2 - |Z_j|_2| \leq |Z - Z_j|_2$$

en prenant pour coordonnées de Z les $c_n(f)$ et pour coordonnées de Z_j les $c_n(f_j)$. Puis, en laissant N tendre vers $+\infty$ on obtient

$$\left| \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \right)^{1/2} - \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_j(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right| \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_j(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

En faisant tendre j vers $+\infty$, on obtient finalement

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

C'est le résultat cherché. □

4.3.3 Fonctions continues par morceaux

Dans ce paragraphe, on donne la preuve du Théorème 4.14, qui généralise les résultats vus dans les cas particuliers des fonctions C^1 et des fonctions en escalier (mais en utilisant ces résultats). L'outil principal est le résultat suivant.

Proposition 4.23. *Soit f une fonction 2π -périodique et continue par morceaux. Alors, il existe une suite f_j de fonctions 2π -périodiques en escalier qui converge uniformément vers f sur $[-\pi, \pi]$ (ou de manière équivalente sur $\mathbb{R}$).*

Preuve. Soit $x_0 = -\pi < \dots < \pi = x_N$ une subdivision adaptée à f . Dire que f est continue par morceaux revient à dire que f est continue sur chaque $]x_{k-1}, x_k[$ avec des limites finies en x_{k-1}^+ et x_k^- . Autrement dit, elle est restriction à $]x_{k-1}, x_k[$ d'une fonction continue sur $[x_{k-1}, x_k]$, qu'on notera $f^{(k)}$ (rien à voir avec une dérivée). Supposons un instant que, pour chaque k , on sache trouver une suite de fonctions en escaliers $(f_j^{(k)})_{j \in \mathbb{N}}$ sur $[x_{k-1}, x_k]$ qui converge uniformément vers $f^{(k)}$ sur cet intervalle. On obtiendra alors la suite (f_j) en posant

$$f_j(x_k) = f(x_k), \quad f_j|_{]x_{k-1}, x_k[} = f_j^{(k)}|_{]x_{k-1}, x_k[} \quad \text{pour chaque } k.$$

Elle est clairement en escaliers. On a la convergence uniforme en observant que

$$\begin{aligned} \|f - f_j\|_\infty &\leq \max \left\{ |(f - f_j)(x_0)|, \dots, |(f - f_j)(x_N)|, \sup_{]x_0, x_1[} |f - f_j|, \dots, \sup_{]x_{N-1}, x_N[} |f - f_j| \right\} \\ &\leq \max \left\{ \sup_{]x_0, x_1[} |f - f_j|, \dots, \sup_{]x_{N-1}, x_N[} |f - f_j| \right\} \\ &\leq \max \left\{ \sup_{[x_0, x_1]} |f^{(1)} - f_j^{(1)}|, \dots, \sup_{[x_{N-1}, x_N]} |f^{(N)} - f_j^{(N)}| \right\} \rightarrow 0 \quad j \rightarrow \infty \end{aligned}$$

puisque par construction chacune des suites (réelles) de la dernière accolade tend vers 0.

Tout ceci montre qu'il suffit de comprendre comment fabriquer une suite de fonctions en escaliers convergeant uniformément vers une fonction continue donnée sur un intervalle compact $[a, b]$. Soit donc une telle fonction g continue sur un intervalle $[a, b]$ et construisons une suite (g_j) de fonctions en escaliers convergeant uniformément vers g sur $[a, b]$. Soit $j \in \mathbb{N}^*$ et utilisons la propriété d'uniforme continuité avec $\epsilon = \frac{1}{j}$: il existe $\delta > 0$ tel que,

$$\text{pour tous } x, y \in [a, b], \quad |x - y| < \delta \implies |g(x) - g(y)| < \epsilon.$$

Choisissons N tel que $b - a/N < \delta$ et posons $x_k = a + k(b - a)/N$ et définissons g_j par

$$g_j(x_k) = g(x_k), \quad k \in \{0, \dots, N\}, \quad g_j|_{]x_{k-1}, x_k[} = g(x_k), \quad k \in \{1, \dots, N\}.$$

Ainsi définie, g_j est en escaliers. De plus, comme ci-dessus,

$$\|g_j - g\|_\infty \leq \max_{1 \leq k \leq N} \sup_{]x_{k-1}, x_k[} |g - g_j| \leq \epsilon = \frac{1}{j}$$

puisque sur $]x_{k-1}, x_k[$, $|g(x) - g_j(x)| = |g(x) - g(x_k)| < \epsilon$. Ainsi $\|g_j - g\|_\infty \rightarrow 0$ quand $j \rightarrow +\infty$. Ceci termine la preuve. $\square$

Preuve de l'égalité de Parseval pour les fonctions continues par morceaux. Elle suit le même schéma que pour les fonctions en escaliers (cf Tableau noir). $\square$

4.3.4 Une application de l'égalité de Parseval

Théorème 4.24. *Soit f une fonction 2π périodique, C^1 par morceaux et continue. Alors elle est limite uniforme de sa série de Fourier sur $[-\pi, \pi]$ (ou de façon équivalente sur $\mathbb{R}$).*

Ce résultat améliore le Théorème 4.12 dans lequel on demande à f d'être C^2 pour avoir le même résultat.

Preuve. Soit $-\pi = x_0 < \dots < x_N = \pi$ une subdivision associée à f , de sorte que sur chaque $]x_{k-1}, x_k[$ f se prolonge en une fonction C^1 sur $[x_{k-1}, x_k]$. Ceci va nous permettre de faire des intégrations par partie comme suit : considérons, pour $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$\begin{aligned}
 inc_n(f) &= \frac{in}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} in e^{inx} f(x) dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N [-e^{-inx} f(x)]_{x_{k-1}}^{x_k} + \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{-inx} f'(x) dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N (e^{-inx_{k-1}} f(x_{k-1}) - e^{-inx_k} f(x_k)) + c_n(f') \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-inx_k} f(x_k) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N e^{-inx_k} f(x_k) + c_n(f') \\
 &= \frac{1}{2\pi} (e^{-inx_0} f(x_0) - e^{-inx_N} f(x_N)) + c_n(f') \\
 &= \frac{1}{2\pi} (e^{in\pi} f(-\pi) - e^{-in\pi} f(\pi)) + c_n(f') \\
 &= c_n(f').
 \end{aligned}$$

Comme f' est continue par morceaux, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f')|^2$ est convergente d'après l'égalité de Parseval. En utilisant le fait que pour tous nombres complexes a, b

$$|ab| \leq \frac{|a|^2 + |b|^2}{2}$$

ce qui suit du fait que $|a|^2 + |b|^2 - 2|ab| = (|a| - |b|)^2 \geq 0$, on voit que

$$|c_n(f)| = \frac{1}{|n|} |inc_n(f)| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + |c_n(f')|^2 \right)$$

et donc que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|$ (sans carré!) est convergente, puisque les séries des $|c_n(f')|^2$ et n^{-2} le sont. Il s'en suit que

$$\sup_{[-\pi, \pi]} |c_n(f) e^{inx}| = |c_n(f)|$$

est le terme général d'une série convergente, indépendante de x , i.e. que la série de Fourier de f converge normalement donc uniformément. Par le théorème de Dirichlet, on sait que la somme de la série est égale à f . Ceci termine la démonstration. $\square$

D'autres exemples d'application de l'égalité de Parseval seront vues en TD, notamment le calcul de certaines sommes de séries, comme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4.3.5 Remarques sur le point de vue hilbertien sur les séries de Fourier

L'idée derrière l'égalité de Parseval est la suivante. On peut fabriquer un espace, noté $L^2(-\pi, \pi)$ (qui en un sens contient tous les espaces de fonctions vus dans cette section) sur lequel

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} g(x) dx$$

définit un vrai produit scalaire, i.e. $\|f\|_2$ est une norme, et qui est complet (on dit que c'est un *espace de Hilbert*). Ceci utilise la notion d'*intégrale de Lebesgue* qui sera vue en L3. Puis en M1, on verra en quel sens la suite de fonctions $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ avec $e_n(x) = e^{inx}$ est une base "orthonormée" de cet espace (on dit en fait une *base hilbertienne*), ce qui donne un sens à la formule analogue à celle vue en dimension finie

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle e_n, f \rangle e_n$$

et qui dans ce contexte se réécrit

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}.$$

L'égalité de Parseval est alors une forme du Théorème de Pythagore qui dit que

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|\langle e_n, f \rangle e_n\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Avec les outils élémentaires (quoique...) vus dans ce cours, $\|\cdot\|_2$ n'est pas une norme sur les fonctions continues par morceaux. Si on prend par exemple la fonction en escaliers f définie par

$$f(-\pi) = f(0) = f(\pi) = 1, \quad f|_{]-\pi, 0[} = f|_{]0, \pi[} = 0$$

on a

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 |f(x)|^2 dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx = 0$$

bien que f ne soit pas identiquement nulle ! Ceci vient du fait que changer une fonction (ici la fonction nulle) en un nombre fini de points ne change pas son intégrale. La construction de l'espace $L^2(-\pi, \pi)$ associée à l'intégrale de Lebesgue permet de gérer ce problème.