

MATH2-ANA4 -
SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

PIERRE GERVAIS
pierre.gervais@math.univ-toulouse.fr
<https://pierre-gervais.apps.math.cnrs.fr/>

2 mars 2026

Introduction

Voici les notes de cours utilisées pour enseigner le module “Suites et séries de fonctions” au printemps 2026 à l’Université Paul Sabatier, basées sur celles de [Vincent Guedj](#) et [Jean-Marc Bouclet](#), ainsi que les feuilles de TDs basées sur celles de [Pierre Petit](#). Il s’agit de séances de cours-TD, réparties sur 14 semaines à raison de 4h par semaine.

Le module se décompose naturellement en trois parties à peu près équivalentes, les notes de cours sont ainsi divisées en trois chapitres de taille similaire.

Objectifs

L’objectif de ce module est de définir les différents modes de convergence de suites et séries de fonctions, en soulignant le rôle de la convergence uniforme pour la stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite, puis d’étudier le développement en série entière et en série de Fourier d’une fonction.

Il s’agit d’un sujet très classique et absolument incontournable pour la suite des études.

Syllabus

Voici le syllabus de ce module.

Suites et séries de fonctions (~4 semaines)

Convergence simple et uniforme d’une suite de fonctions : critère de Cauchy uniforme. Stabilité de la bornitude et régularité $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 0$) et résultats de permutation de limites/dérivées/intégrales. Exemples d’approximation uniforme : une fonction continue sur un segment par des fonctions en escaliers ou par des polynômes.

Rappels sur les séries numériques. Convergence simple, uniforme et normale des séries de fonctions. Adaptation des propriétés du paragraphe précédent à ce cadre.

Séries entières (~5 semaines)

Convergences : rayon de convergence, lemme d’Abel, règle de D’Alembert. Convergence normale sur tout disque fermé contenu dans le disque ouvert de convergence. Somme et produit de Cauchy de deux séries entières. Les coefficients des séries entières sont réels ou complexes.

Séries entières de la variable réelle : dérivation et primitivation sur l'intervalle ouvert de convergence. Expression des coefficients de la série entière en fonction des dérivées en 0 de la somme de la série entière. Développements en séries entières : développement sur $\mathbb{C}$ de $\exp z$, sur le disque unité de $1/(1-z)$. Développement en séries entières de la variable réelle (exemples des fonctions exponentielle, $\cos$, $\sin$, $\arctan$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^a$). Développement de Taylor d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

Applications aux équations différentielles linéaires : définition, notion de solution. Résolution par recherche d'une solution développable en série entière. Développement en série entière d'une fonction qui est solution d'une équation différentielle linéaire. Exponentielle de matrices. Exponentielle de la somme de deux endomorphismes qui commutent. Dérivation de $t \mapsto \exp(tA)$, où A est une matrice carrée. Le calcul d'une exponentielle se limite au cas où A est diagonalisable ou d'ordre $n \leq 3$.

Série de Fourier (~5 semaines)

Coefficients de Fourier d'une fonction continue par morceaux 2π -périodique. Applications des théorèmes généraux sur les séries de fonctions à ce contexte. On pourra montrer par exemple que la série de Fourier d'une fonction $\mathcal{C}^1$ et 2π -périodique converge normalement. Théorème de Dirichlet (preuve admise).

Bibliographie

- Il existe de nombreuses notes de cours disponibles en ligne sur ce sujet très classique ; ce poly reprend et adapte les notes de [Jean-Marc Bouclet](#), adaptées par [Vincent Guedj](#), pour un module similaire de la précédente accréditation.
- Parmi les nombreux ouvrages qui couvrent le matériel de ce module, mentionnons *Tout-en-un pour la Licence, tome 1*, de Jean-Pierre Ramis et André Warusfel (dir.), Dunod (2018) : chapitres II.2 et II.4.

Chapitre 1

Suites et séries de fonctions

Introduction

Beaucoup de problèmes mènent à considérer des fonctions définies comme des limites de suites de fonctions $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ ou même plus précisément des séries de fonctions $f = \sum f_n$. Par exemple, pour résoudre une équation fonctionnelle, c'est-à-dire dont l'inconnue est une fonction f (équation différentielle, équation aux dérivées partielles, équation intégrale...) on peut construire une suite de solutions f_n qui sont *presque* des solutions, et qui (on l'espère) converge vers une solution exacte¹. On pourra alors être amené à se poser les questions suivantes :

- Est-ce que ces limites existent ?
- Sont-elles régulières ? (bornées, continues, dérivables, $C^k \dots$)
- Peut-on calculer leurs intégrales ?

Lorsque la suite converge *simplement*, on ne peut en général pas dire grand chose de la limite f . Le but de ce chapitre est de présenter et se familiariser avec la notion de convergence *uniforme* qui permet de déduire des informations intéressantes sur la limite.

1.1 Suites de fonctions

Dans cette partie, I désigne une partie a priori quelconque de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur I , i.e. pour chaque n on a une fonction $f_n : I \rightarrow \mathbb{C}$.

Si une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ est bornée (c'est le cas en particulier si φ est continue et $I = [a, b]$), on définit

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in I} |\varphi(x)|.$$

Notons que cette *norme* $\|\cdot\|_\infty$, tout comme le module (resp. valeur absolue) $|\cdot|$ sur $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) satisfait les trois propriétés suivantes (**exercice**) :

1. Par exemple, pour résoudre une équation fonctionnelle $\Phi[f] = 0$ on pourrait considérer une équation approximative $\Phi_n[f_n] = 0$ plus facile à résoudre. Il faudra alors justifier que $(f_n, \Phi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (f, \Phi)$ en un certain sens afin de passer à la limite, et ainsi avoir une solution à l'équation initiale $\Phi[f] = 0$.

1. (Homogénéité) $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$.
2. (Inégalité triangulaire) $\forall f, g$ bornées, $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
3. (Séparation) $\forall f$ bornée, $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0$.

1.1.1 Types de convergence

Définition 1.1. Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, on définit les modes de convergence suivants :

1. On dit que $(f_n)_n$ **converge simplement sur I vers f** si pour chaque $x \in I$, la suite $(f_n(x))_n$ est convergente, c'est-à-dire

$$\text{pour chaque } x \in I, \quad f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x) . \quad (1.1.1)$$

On notera alors $f_n \xrightarrow{s} f$.

2. On dit que $(f_n)_n$ **converge uniformément sur I vers f** si

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 . \quad (1.1.2)$$

On notera alors $f_n \xrightarrow{u} f$.

N.B. En particulier, l'écart $f_n - f$ est une fonction bornée sur I .

Comparaison des modes de convergence La convergence uniforme est bien entendu **plus forte** que la simple puisque $f_n \xrightarrow{u} f$ implique

$$\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

et donc $f_n \xrightarrow{s} f$. Mais leur différence est plus profonde et est la suivante :

1. Dire que $f_n \xrightarrow{s} f$ signifie

$$\forall \varepsilon > 0, \underline{\mathbf{x}} \in \underline{\mathbf{I}}, \exists n_{\underline{\mathbf{x}}, \varepsilon} \geq 0 : (\forall n \geq n_{\underline{\mathbf{x}}, \varepsilon}, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) . \quad (1.1.3)$$

Ici, n doit être suffisamment grand **en fonction de $\underline{\mathbf{x}}$** (en plus de ε).

2. Dire que $f_n \xrightarrow{u} f$ signifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : (\forall n \geq n_\varepsilon, \underline{\mathbf{x}} \in \underline{\mathbf{I}}, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) . \quad (1.1.4)$$

Ici, n doit être suffisamment grand **uniformément en (*i.e.* indépendamment de) $\underline{\mathbf{x}} \in \underline{\mathbf{I}}$** , pour cette raison on dit aussi que $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ **uniformément en $\underline{\mathbf{x}} \in \underline{\mathbf{I}}$** . On peut aussi écrire de manière plus compacte

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : (\forall n \geq n_\varepsilon, \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon) . \quad (1.1.5)$$

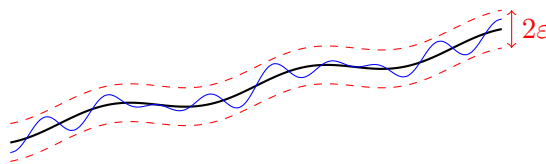


FIGURE 1.1 – En noir une fonction f et en bleu une fonction f_n telle que $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$. Dire que $f_n \xrightarrow{u} f$ signifie visuellement que peu importe la petitesse de ε , les fonctions f_n se resserrent autour de f à une distance ε à partir d'un certain rang n_ε suffisamment grand.

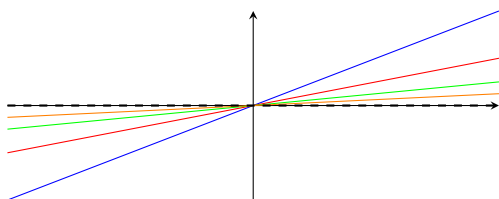
Exercice 1.2. Si $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ convergent simplement (resp. uniformément) vers f et g , alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, il en va de même pour $f + \lambda g$.

Exemples 1.3. Considérons ces deux suites de fonctions définies sur $I = \mathbb{R}$:

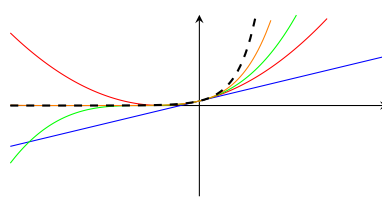
$$f_n(x) = \frac{x}{n} \quad \text{et} \quad f(x) = 0, \quad g_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad g(x) = e^x.$$

Elles convergent simplement sur I mais pas uniformément.

En revanche, elle converge uniformément sur tout segment $J = [a, b] \subset I$, on dit qu'elle converge **localement uniformément** sur I .



(a) $f_n(x)$ pour $n = 1, 2, 4, 8$



(b) $g_n(x)$ pour $n = 1, 2, 3, 6$

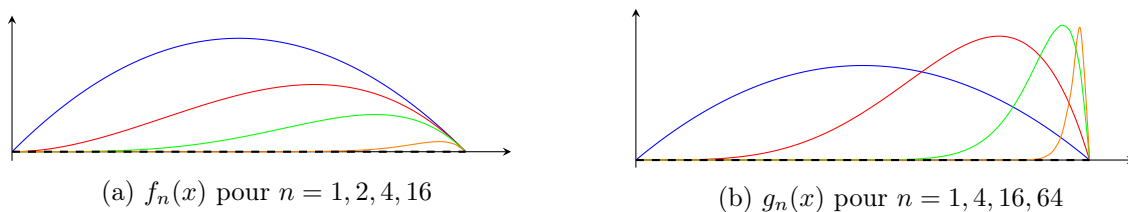
Le deuxième exemple est un cas particulier d'un résultat que nous montrerons plus tard : toute fonction continue est limite simple (et même localement uniforme) de fonctions polynomiales (Théorème 1.22).

Exercice 1.4. En déterminant leur tableaux de variations, montrer que cette suite converge uniformément sur $I = [0, 1]$:

$$f_n(x) = x^n(1 - x) \quad \text{et} \quad f(x) = 0,$$

mais que celle-ci converge simplement mais pas uniformément :

$$g_n(x) = nx^n(1 - x) \quad \text{et} \quad g(x) = 0.$$



1.1.2 Outils pour montrer la convergence uniforme

Voyons à présent plusieurs outils pratiques pour montrer la convergence uniforme de fonctions.

Ce premier critère a l'avantage de reformuler la convergence uniforme d'une suite de fonctions **sans parler de sa limite**, ce qui sera particulièrement pratique pour l'étude de séries de fonctions pour lesquelles on est en pratique capable de montrer leur convergence, mais pas de les calculer.

Proposition 1.5 (Critère de Cauchy uniforme). *La suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur I si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \geq 0 : (\forall m, n \geq n_\varepsilon, \|f_n - f_m\| \leq \varepsilon) . \quad (1.1.6)$$

Démonstration. Nous montrerons d'abord le sens direct, puis le sens indirect. Notons que le critère de Cauchy uniforme se réécrit ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \geq 0 : (\forall m, n \geq n_\varepsilon, x \in I, \|f_n - f_m\| \leq \varepsilon) . \quad (1.1.7)$$

Étape 1: Sens direct. Supposons que (f_n) converge uniformément vers f sur I . Alors, par définition, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $n_\varepsilon \geq 0$ tel que

$$\forall n \geq n_\varepsilon, x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon .$$

Il suit que pour tous $m, n \geq n_\varepsilon$ et $x \in I$,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &\leq 2\varepsilon . \end{aligned}$$

En remplaçant ε par $\varepsilon/2$, on a ainsi montré (1.1.7). Cela conclut cette étape.

Étape 2: Sens indirect. Supposons que $(f_n)_n$ soit uniformément de Cauchy, on va d'abord construire sa limite simple f , puis montrer que la convergence est uniforme.

Soit $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))_n$ est de Cauchy, d'après (1.1.7). Comme $\mathbb{C}$ est complet, elle est convergente, et on pose $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Par construction, f_n converge simplement vers f , mais montrons que la convergence est en fait uniforme. Soit $\varepsilon > 0$. Par critère de Cauchy uniforme (1.1.6), il existe $n_\varepsilon \geq 0$ tel que

$$\forall m, n \geq n_\varepsilon, x \in I, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon ,$$

donc en faisant tendre $m \rightarrow \infty$, on obtient

$$\forall n \geq n_\varepsilon, x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon .$$

Autrement dit, pour tout $n \geq n_\varepsilon$ on a $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$. En conclusion, $f_n \xrightarrow{u} f$, ce qui conclut cette étape et la preuve. $\square$

Ce prochain critère permet de justifier que si certaines expressions faisant intervenir une suite de fonction convergeant uniformément sont elles aussi uniformément convergentes.

Théorème 1.6. *Soit $f_n : I \rightarrow J$ une suite de fonctions convergeant **uniformément** vers f sur I , et $\Phi : J \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction **uniformément continue**. Alors $\Phi \circ f_n \xrightarrow{u} \Phi \circ f$.*

En particulier, par le théorème de Heine, si $\Phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ et $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une suite de fonctions bornées convergeant uniformément vers f , alors $\Phi \circ f_n \xrightarrow{u} \Phi \circ f$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall u, v \in J, |u - v| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |\Phi(u) - \Phi(v)| \leq \varepsilon .$$

Ainsi pour $n \geq n_\varepsilon$ assez grand, on a

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow (\forall x, y \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \delta_\varepsilon) ,$$

et par suite

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |\Phi(f_n(x)) - \Phi(f(x))| \leq \varepsilon ,$$

autrement dit pour tout $n \geq n_\varepsilon$ on a $\|\Phi \circ f_n - \Phi \circ f\|_\infty \leq \varepsilon$. Cela conclut la preuve. $\square$

Exemple 1.7. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions **positives** ($J = \mathbb{R}_+$) convergeant uniformément vers f , alors on a que*

$$\log(1 + f_n) \xrightarrow{u} \log(1 + f), \quad \frac{1}{1 + f_n} \xrightarrow{u} \frac{1}{1 + f} \quad \text{et} \quad \sqrt{1 + f_n} \xrightarrow{u} \sqrt{1 + f} .$$

*Soit $(g_n)_n$ une suite de fonctions **bornées** convergeant uniformément vers g , alors on a que*

$$g_n^{100} \xrightarrow{u} g^{100} \quad \text{et} \quad e^{g_n} \xrightarrow{u} e^g .$$

1.1.3 Propriétés de la convergence uniforme

Le principal “défaut” de la convergence simple est qu’une suite de fonctions “gentilles” ne converge pas forcément vers une fonction “gentille”. Nous allons voir plusieurs exemples suivis de résultats où la convergence uniforme (voire mieux) règle ce problème.

Notons cependant que dans la plupart des exemples, le problème est lié à un seul point $x_* \in I$. On pourra régler ce problème en “coupant” ce point.

Exercice 1.8 (Couper les point problématiques). *Montrer, pour chacun des contreexemples suivants, qu’en remplaçant I par un autre “éloigné de x_* d’une distance $\delta \in]0, 1[$ ”, on tombe bien dans le cadre du théorème qui le suit :*

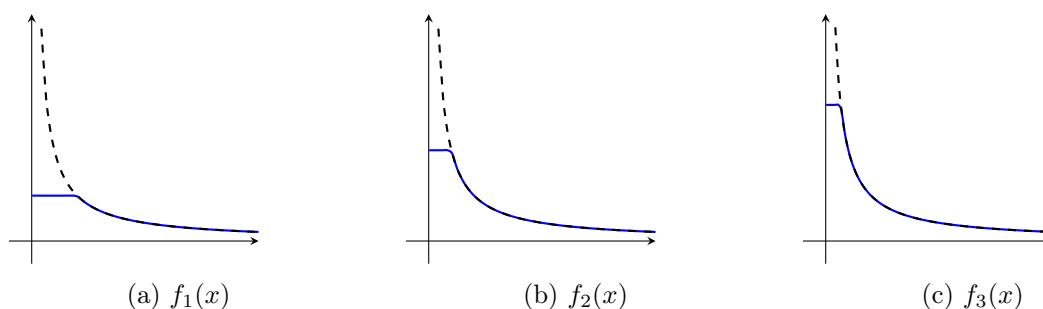
- Pour l’Exemple 1.9, $x_* = 0$ et $J = [\delta, +\infty[$
- Pour l’Exemple 1.12, $x_* = 1$ et $J = [0, 1 - \delta]$
- Pour l’Exemple 1.15, $x_* = 0$ et $J = [\delta, 1]$
- Pour l’Exemple 1.17, $x_* = 0$ et $J = [-1, -\delta] \cup [\delta, 1]$

Préservation de la bornitude On se demande quand est-ce qu’une suite de fonction bornées converge vers une fonction bornée.

Exemple 1.9 (Bornées + cvg. simple $\not\Rightarrow$ lim. bornée). *Considérons la suite de fonctions définie sur $I =]0, +\infty[$*

$$f_n(x) = \min\left(n, \frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$

La suite converge simplement mais pas uniformément.



Théorème 1.10 (Bornées + cvg. unif. $\Rightarrow$ lim. bornée). *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions bornées sur I . Si la suite converge **uniformément** vers f sur I , alors f est **bornée** sur I .*

Démonstration. Il existe $n_* \geq 0$ tel que (par exemple) $\|f_{n_*} - f\|_\infty \leq 1$, donc puisque f_{n_*} est bornée par hypothèse

$$\|f\|_\infty \leq \|f - f_{n_*}\|_\infty + \|f_{n_*}\|_\infty \leq 1 + \|f_{n_*}\|_\infty < \infty ,$$

donc f est bornée. $\square$

Enfin, un dernier critère, moins souvent utile, laissé en exercice. En réalité, il s'agit du cas d'une série (télescopique) de fonctions.

Exercice 1.11. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_\infty < \infty$, à l'aide du critère de Cauchy, montrer que la suite converge uniformément.

Préservation de la continuité On se demande quand est-ce qu'une suite de fonction continues converge vers une fonction continue, mais aussi quand on peut échanger les limites

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) . \quad (1.1.8)$$

Exemple 1.12 ($\mathcal{C}^0 + \text{cvg. simple} \not\Rightarrow \text{lim. continue}$). Considérons la suite définie sur $I = [0, 1]$

$$f_n(x) = x^n \quad \text{et} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases} .$$

La suite converge simplement mais pas uniformément.

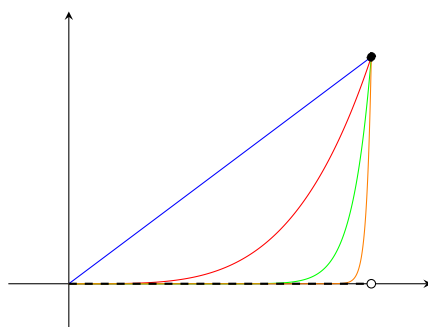


FIGURE 1.5 – $f_n(x)$ pour $n = 1, 4, 16, 64$

Théorème 1.13 ($\mathcal{C}^0 + \text{cvg. unif.} \Rightarrow \text{lim. } \mathcal{C}^0$). Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions **continues** sur I . Si la suite converge **uniformément** vers f sur I , alors f est **continue** sur I .

En conséquence, on a (1.1.8).

Démonstration. Soit $x \in I$, montrons que f est continue en x . Considérons, pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, un rang $n_\varepsilon \geq 0$ tel que $\|f_{n_\varepsilon} - f\|_\infty \leq \varepsilon$. On a donc pour tout $y \in I$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \underbrace{|f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)|}_{\leq \|f - f_{n_\varepsilon}\|_\infty \leq \varepsilon} + |f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(y)| + \underbrace{|f_{n_\varepsilon}(y) - f(y)|}_{\leq \|f_{n_\varepsilon} - f\|_\infty \leq \varepsilon} \\ &\leq 2\varepsilon + |f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(y)|. \end{aligned}$$

Puisque f_{n_ε} est continue, on en déduit $\lim_{y \rightarrow x} |f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(y)| \leq 2\varepsilon$, et puisque ε est arbitraire, on en déduit ensuite (en faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$) que $\lim_{y \rightarrow x} |f(x) - f(y)| = 0$, c'est-à-dire $\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x)$. En conclusion, f est continue sur I . $\square$

Exercice 1.14 (Continuité unif. + cvg. unif $\Rightarrow$ Continuité unif.). *En adaptant légèrement la preuve du Théorème 1.13, montrer que la convergence uniforme préserve également la continuité uniforme.*

Permuter limite et intégrale On se demande quand est-ce qu'il est possible d'échanger la limite et l'intégrale :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, dx. \quad (1.1.9)$$

Exemple 1.15 (Cvg. simple $\not\Rightarrow$ lim. integ.). *Considérons la suite de fonctions définie sur $I = [0, 1]$*

$$f_n(x) = n^2 x^n (1 - x) \quad \text{et} \quad f(x) = 0.$$

La suite converge simplement mais pas uniformément, et on a

$$\int_0^1 f_n(x) \, dx = \frac{2n}{n+2} - \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f(x) \, dx = 0.$$

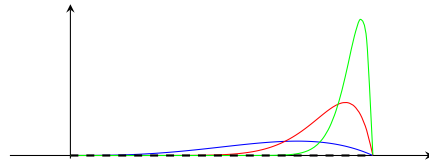


FIGURE 1.6 – $f_n(x)$ pour $n = 3, 10, 25$

Corollaire 1.16 (Cvg. unif. $\Rightarrow$ lim. integ.). *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur $I = [a, b]$. Si la suite converge **uniformément** sur I , alors on a (1.1.9).*

Démonstration. Soit f la limite uniforme de f_n (continue par le Théorème 1.13), on a

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq (b-a) \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 .$$

Ce qui conclut la preuve. $\square$

Préservation de la dérivabilité On se demande quand est-ce qu'une suite de fonction dérivables converge vers une fonction dérivable, mais aussi s'il est possible d'échanger la limite et la dérivation

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n' , \quad (1.1.10a)$$

ainsi que les limites

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) . \quad (1.1.10b)$$

Exemple 1.17 ($\mathcal{C}^1 + \text{cvg. unif.} \not\Rightarrow \lim. \mathcal{C}^1$). Considérons la suite de fonctions définie sur $I = [-1, 1]$ pour $n \geq 1$

$$f_n(x) = \sqrt{n^{-2} + x^2} \quad \text{et} \quad f(x) = |x| .$$

La suite converge uniformément, mais la limite n'est pas dérivable.

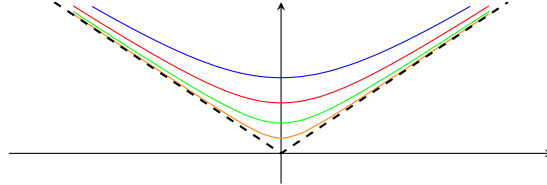


FIGURE 1.7 – $f_n(x)$ pour $n = 2, 3, 5, 10$

Théorème 1.18 ($\mathcal{C}^1 + \text{dérivées cvg. unif.} + \text{cvg. simple en un point} \Rightarrow \lim. \mathcal{C}^1$). Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{C})$ avec $I = [a, b]$ telles que

$$f_n' \xrightarrow{u} g \quad \text{et} \quad \exists x_0 \in I : f_n(x_0) \rightarrow \ell \in \mathbb{R} ,$$

alors il existe $f \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{C})$ tel que

$$f_n' \xrightarrow{u} f' = g \quad \text{et} \quad f_n \xrightarrow{u} f .$$

En conséquence, on a bien (1.1.10).

Démonstration. Par le [Théorème fondamental de l'analyse](#), on a pour tout $x \in I$

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt ,$$

et en passant à la limite $n \rightarrow \infty$ à x fixé, on a

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \ell + \int_{x_0}^x g(t) dt ,$$

ce qui est bien défini par le Corolaire 1.16 et car g est continue par le Théorème 1.13. On en déduit que $g \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{C})$ est une primitive de f et donc que $f \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{C})$ avec $f' = g$ et $f(x_0) = \ell$.

Pour l'instant, on a établi que f est la limite simple de f_n , mais cette convergence est en fait uniforme :

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \left| f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt - f_n(x_0) - \int_{x_0}^x f'_n(t) dt \right| \\ &\leq |f(x_0) - f_n(x_0)| + \left| \int_{x_0}^x f'(t) dt - \int_{x_0}^x f'_n(t) dt \right| \\ &\leq |f(x_0) - f_n(x_0)| + \int_{x_0}^x \|f' - f'_n\|_{\infty} dt . \end{aligned}$$

Puisque $|x - x_0| \leq b - a$, on en déduit

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x_0) - f_n(x_0)| + (b - a) \|f' - f'_n\|_{\infty}$$

et comme ce majorant ne dépend pas de x , on en déduit

$$\|f - f_n\|_{\infty} \leq |f(x_0) - f_n(x_0)| + (b - a) \|f' - f'_n\|_{\infty} \rightarrow 0 ,$$

ce qui termine la preuve. $\square$

On peut généraliser par récurrence ce résultat à la préservation du caractère $\mathcal{C}^r$ d'une suite de fonctions (**exercice**).

Corollaire 1.19. Soit un entier $r \geq 1$, et $(f_n)_n$ une suite de fonctions $\mathcal{C}^r(I; \mathbb{C})$ avec $I = [a, b]$ tels que pour certains $x_0, x_1, \dots, x_{r-1}$

$$f_n^{(r)} \xrightarrow{u} g \quad \text{et} \quad \forall s \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(s)}(x_s) \text{ existe} ,$$

alors il existe $f \in \mathcal{C}^r(I; \mathbb{C})$ tel que

$$\forall s \in \llbracket 0, r \rrbracket, \quad f_n^{(s)} \xrightarrow{u} f^{(s)} .$$

Remarque 1.20. Il est important que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(s)}(x_s)$ existe pour tout $s \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$, autrement on pourrait considérer par exemple

$$f_n(x) = f(x) + n p(x) \quad \text{où} \quad p \in \mathbb{R}_{r-1}[X] ,$$

qui ne convergerait même pas simplement vers f .

Convergence uniforme avec des fonctions “simples” On se demande si on peut approximer n’importe quelle fonction continue par une suite de fonctions “simples”, à savoir des polynômes ou des fonctions en escalier. Dans le premier cas, il s’agit d’une réciproque du Théorème 1.13, mais en se restreignant à des fonctions f_n polynomiales.

Exemple 1.21 (Domaine non-borné $\not\Rightarrow \exists$ approximation polynomiale). *Il n’existe aucune suite de fonctions polynomiales $(f_n)_n$ telle que $f_n \xrightarrow{u} \exp$ sur $I = \mathbb{R}_+$.*

Indication : Croissances comparées.

Théorème 1.22 (Weierstrass – Domaine borné $\Rightarrow \exists$ approximation polynomiale). *Soit I un segment et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$. En définissant*

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) b_{k,n}(x) \quad \text{où} \quad b_{k,n}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

on a que $f_n \xrightarrow{u} f$ sur I .

Démonstration. Puisque si $I = [a, b]$, on peut considérer à la place $\tilde{f}(x) = f(a + (b-a)x)$ pour $x \in [0, 1]$. Il suffit donc de traiter le cas $I = [0, 1]$.

On souhaite estimer $|f(x) - f_n(x)|$ uniformément en $x \in [0, 1]$. Puisque $\sum_{k=0}^n b_{k,n}(x) = 1$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^n b_{k,n}(x) |f(x) - f(k/n)|.$$

Pour les valeurs de k telles que $x \approx k/n$, on a $f(k/n) \approx f(x)$, et donc le terme dans la somme est proche de 0. Les autres valeurs de k seront traitées avec l’estimation clé de l’Étape 1.

Étape 1: Identité préliminaire. En utilisant que pour tout entiers $0 \leq a \leq b$ et $x \in \mathbb{R}$ on a

$$a \binom{b}{a} = \binom{b-1}{a-1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n b_{k,n}(x) = 1,$$

on peut montrer (**exercice**) les identités

$$\sum_{k=0}^n k b_{k,n}(x) = nx \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n k(k-1) b_{k,n}(x) = n(n-1)x^2,$$

dont on déduit la formule clé de cette preuve :

$$\forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq \sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 b_{k,n}(x) = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n}.$$

Étape 2: Estimation de convergence. Puisque f est uniformément continue sur $[0, 1]$ (Théorème de Heine), pour tout $\varepsilon > 0$ donné il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0, 1], \quad (|x - y| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

On distingue les indices $k \in \llbracket 0, n \rrbracket = A \cup B$ ainsi :

$$A := \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket : |x - k/n| \leq \delta_\varepsilon\} \quad \text{et} \quad B := \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket : |x - k/n| \geq \delta_\varepsilon\} .$$

De cette façon, on a

$$\sum_{k \in A} b_{k,n}(x) |f(k/n) - f(x)| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^n b_{k,n}(x) \leq \varepsilon ,$$

et en utilisant que pour $k \in B$ on a $1 \leq \delta_\varepsilon^{-2}(x - k/n)^2$, l'estimation clé de l'Étape 1 implique

$$\sum_{k \in B} b_{k,n}(x) |f(k/n) - f(x)| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\delta_\varepsilon^2} \sum_{k=0}^n b_{k,n}(x) (x - k/n)^2 = \frac{\|f\|_\infty}{2\delta_\varepsilon^2 n} .$$

Puisque les majorants des deux sommes sont indépendants de $x \in [0, 1]$, on conclut

$$\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2\delta_\varepsilon^2 n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varepsilon .$$

Puisque ε est arbitraire, on en déduit (en faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$) que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$, c'est-à-dire $f_n \xrightarrow{u} f$. Cela conclut la preuve. $\square$

Le polynôme défini dans le Théorème de Weierstrass 1.22 porte aussi le nom de **Courbe de Bézier** et est utilisé dans les domaines de l'infographie ou l'industrie pour tracer des courbes définies par des “points de contrôles” (ici $M_k^0 := (k/n, f(k/n))$ où $0 \leq k \leq n$). Afin de construire $f_n(x)$, on construit récursivement pour chaque $1 \leq \ell \leq n$ les points $(M_k^\ell)_{k=0}^{n-\ell}$ par interpolation :

$$\forall 0 \leq k \leq n - \ell , \quad M_k^\ell(x) = (1 - x)M_k^{\ell-1}(x) + xM_{k+1}^{\ell-1}(x) ,$$

on obtient alors que $f_n(x) = M_n^n(x)$.

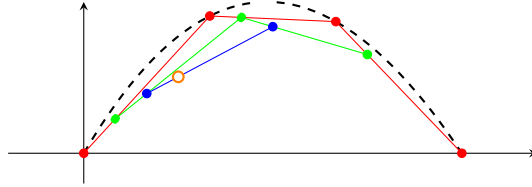


FIGURE 1.8 – Ici $n = 3$ et $x = 1/4$. Le graphe de f est en pointillé. Les points remplis sont les points de contrôles $M_k^\ell(x)$ et le point orange non-rempli correspond à $(x, f_3(x))$. La courbe définie par l'ensemble de ces derniers pour tout x est la *Courbe de Bézier* associée à ces points de contrôle.

Théorème 1.23 (Uniformément continue $\Rightarrow \exists$ approximation en escalier). *Soit f une fonction uniformément continue sur un intervalle ouvert I (pas forcément borné), pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $f_\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{C}$ constante par morceaux telle que $\|f - f_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$.*

N.B. : f est uniformément continue par exemple si elle continue sur un segment $I = [a, b]$ ou si elle est *Lipschitzienne*.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, puisque f est uniformément continue, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x, y \in I, \quad (|x - y| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon) .$$

On découpe I en segments délimités par $(x_n)_{n \in \mathcal{N}_\varepsilon}$ et de de taille δ_ε au plus :

- Si $I =]-\infty, +\infty[$, on pose $x_n = n\delta_\varepsilon$ avec $n \in \mathcal{N}_\varepsilon := \mathbb{Z}$.
- Si $I =]-\infty, b[$, on pose $x_n = b + n\delta_\varepsilon$ avec $n \in \mathcal{N}_\varepsilon := -\mathbb{N}$.
- Si $I =]a, +\infty[$, on pose $x_n = a + n\delta_\varepsilon$ avec $n \in \mathcal{N}_\varepsilon := \mathbb{N}$.
- Si $I =]a, b[$, on pose $x_n = a + n\frac{b-a}{N_\varepsilon}$ avec $n \in \mathcal{N}_\varepsilon = \llbracket 0, N_\varepsilon \rrbracket$ où $N_\varepsilon \geq \frac{b-a}{\delta_\varepsilon}$.

On définit alors f_ε par morceaux comme suit :

$$f_\varepsilon(x) = f\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right) \quad \text{si } x \in]x_n, x_{n+1}[,$$

et pour tout x_n qui n'est pas au bord de I , on pose aussi $f_\varepsilon(x_n) = f\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right)$. Ainsi pour tout $x \in [x_n, x_{n+1}]$ on a $|f(x) - f(x_n)| \leq \varepsilon$ puisque $|x - x_n| \leq \delta_\varepsilon$, et donc pour tout $x \in I$ on a $|f(x) - f_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$. Autrement dit, $\|f - f_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$, ce qui conclut la preuve. $\square$

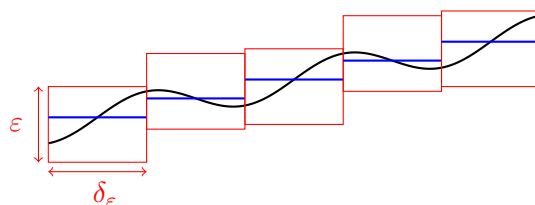


FIGURE 1.9 – En noir la fonction f et en bleu la fonction f_ε . Dire que f est uniformément continue signifie visuellement que, peu importe la petitesse de ε , on pourra trouver un rectangle de hauteur ε suffisamment étroit (de largeur δ_ε) tel qu'il soit possible de recouvrir le graphe de f par des copies de ce rectangle, sans que f ne s'en échappe par le haut ou le bas.

Exercice 1.24. À l'aide du Théorème 1.23 et en utilisant le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$, montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{C})$, on a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty \quad \text{où} \quad \|f\|_p := \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} .$$

On admettra que $\|\cdot\|_p$ satisfait l'inégalité triangulaire.

1.2 Séries de fonctions

Les séries de fonctions sont un cas particulier de suite de fonctions :

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad \text{où} \quad f_n = \sum_{k=0}^n u_k ,$$

et leur étude combine les techniques liées à celle des suites de fonctions et des séries numériques. Pour cette raison, on commence par un rappel sur ces dernières.

1.2.1 Rappel sur les séries numériques

Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes, on dit que la série numérique $\sum u_n$ **converge** lorsque

$$\exists U \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^N u_n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} U ,$$

ce qui revient à dire par le critère de Cauchy que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \geq 0 : \left(\forall M \geq N \geq N_\varepsilon, \left| \sum_{n=N}^M u_n \right| \leq \varepsilon \right) .$$

On dit qu'elle **converge absolument** lorsque $\sum |u_n|$ converge, ce qui revient à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \geq 0 : \left(\forall M \geq N \geq N_\varepsilon, \sum_{n=N}^M |u_n| \leq \varepsilon \right) .$$

Contrairement aux somme finies, **l'ordre des termes est important** : par exemple, pour tout $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, il existe un réarrangement (bijection) $\varphi_\ell : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{\varphi_\ell(n)} = \ell \quad \text{où} \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n+1} .$$

En général, ce résultat est vrai pour toute série $\sum u_n$ qui converge simplement mais pas absolument (*[Théorème de réarrangement de Riemann](#)*). Autrement dit :

$$\forall \varphi \text{ bijection de } \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_{\varphi(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \sum |u_n| < \infty .$$

Dans ce cas on peut même *sommer par paquets* : si $\mathbb{N} = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ et $\sum |u_n| < \infty$ alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k \in A_n} u_k \right) .$$

Rappelons à présent les principaux critères pour montrer la convergence d'une série.

Critères pour des séries à termes positifs Commençons par présenter des critères pour les séries à termes positifs, ce qui permet en particulier de prouver la **convergence absolue** d'une série.

Soient deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ de réels **strictement positifs** (pour simplifier). Le principe élémentaire de comparaison

$$\forall n \geq N, \quad u_n \leq C v_n \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{N-1} u_n + C \sum_{n=N}^{\infty} v_n \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\},$$

mène aux critères de comparaisons suivants :

- Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n < \infty \Leftrightarrow \sum v_n < \infty$.
- Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ (en part. si $u_n = o(v_n)$) alors $\sum u_n < \infty \Leftarrow \sum v_n < \infty$.

Attention : L'hypothèse que les suites à comparer soient positives est cruciale ; un contreexemple classique est la suite $u_n = (-1)^n / \sqrt{n} \sim v_n = 1/n + (-1)^n \sqrt{n}$, en effet $\sum u_n$ converge (mais pas absolument) tandis que $\sum v_n$ non.

L'exemple le plus simple de série dont on sait distinguer les cas de convergence/divergence est la série géométrique $\sum q^n$; elle converge (vers $\frac{1}{1-q}$) si et seulement si $|q| < 1$. En effet, rappelons à toutes fins utiles que pour $q \neq 1$

$$(1-q) \sum_{n=0}^{N-1} q^n = \sum_{n=0}^{N-1} (q^n - q^{n+1}) = 1 - q^N \quad \text{ainsi} \quad \sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1 - q^N}{1 - q}.$$

En comparant à une série géométrique, on peut alors affirmer que $\sum u_n$ converge dans les cas suivants :

- (**Règle de d'Alembert**) Si $\limsup u_{n+1}/u_n < 1$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq q u_n$ pour un certain $q \in]0, 1[$ et n assez grand.
- (**Règle de Cauchy**) Si $\limsup (u_n)^{1/n} < 1$, c'est-à-dire $u_n \leq q^n$ pour un certain $q \in]0, 1[$ et n assez grand.

Enfin, pour des séries de la forme $u_n = f(n)$ avec $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ **décroissante**, le simple fait que $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f \leq f(n)$ permet de comparer avec l'intégrale impropre $\int_0^\infty f(x) dx$:

$$(\text{Comp. série-intégrale}) \quad \int_0^\infty f(x) dx \leq \sum_{n=0}^\infty f(n) \leq f(0) + \int_0^\infty f(x) dx.$$

Similairement, notant que $\int_1^\infty = \sum \int_{2^n}^{2^{n+1}} f$ ainsi que $2^{n+1} f(2^n) \leq \int_{2^n}^{2^{n+1}} f dx \leq 2^n f(2^n)$, on peut montrer une version du **critère de condensation de Cauchy**. En étant plus malin, on peut le prouver dans une version plus satisfaisante :

$$(\text{Cond. de Cauchy}) \quad \sum_{n=1}^\infty f(n) \leq \sum_{n=0}^\infty 2^n f(2^n) \leq 2 \sum_{n=1}^\infty f(n).$$

On peut comprendre ce critère, *en un sens*, en la version discrète du changement de variable $x = 2^y$ qui donne $\int f(x) dx = \int 2^y f(2^y) dy \times \log 2$.

Exemple 1.25. La série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, et $\sum_{n=2}^{\infty} n^{-\alpha}(\log n)^{-\beta}$ converge si et seulement si $(\alpha, \beta) \in]1, \infty[\times \mathbb{R} \cup \{1\} \times]1, \infty[$.

Critères de type intégration par partie Les séries peuvent être étudiées avec des intuitions venant de l'étude d'intégrales impropres, ce qui est possible grâce aux correspondances intuitives suivantes :

$$f(x) \longleftrightarrow u_n, \quad f'(x) \longleftrightarrow u_{n+1} - u_n, \quad \int_0^x f(t) dt \longleftrightarrow \sum_{k=0}^n u_k.$$

Par exemple, dire qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ admet une limite en $+\infty$ revient à dire que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f' dt$ converge puisque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f'(t) dt,$$

et de façon analogue, dire qu'une suite $(u_n)_n$ converge revient à dire que la série télescopique associée converge :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k).$$

Une autre grande technique de calcul intégral admettant un analogue discret est l'*intégration par partie* :

$$\int_x^y f'(t)g(t)dt = f(y)g(y) - f(x)g(x) - \int_x^y f(t)g'(t)dt.$$

Cela permet de montrer que certaines intégrales convergent ; pour $\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ et $b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$ telles que

$$\int_0^\infty |\varepsilon'(t)|dt < \infty, \quad \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0, \quad B(x) = \int_0^x b(t)dt \text{ bornée},$$

on obtient par une intégration par partie

$$\int_0^x \varepsilon(t)B'(t)dt = \underbrace{\varepsilon(x)B(x)}_{\xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0} - \int_0^x \varepsilon'(t)B(t)dt \xrightarrow{x \rightarrow \infty} - \int_0^\infty \varepsilon'(t)B(t)dt, \quad (1.2.11)$$

où l'intégrale de droite converge *absolument* puisque B est borné.

Exemple 1.26. $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge, avec $\varepsilon(x) = 1/x$ et $b = \sin$ (donc $B = -\cos$).

Dans le cas des somme, en s'inspirant la preuve de l'intégration par partie, on considère l'identité suivante mimiquant la règle de dérivation $f'g + fg' = (fg)'$:

$$(u_{n+1} - u_n)v_n + u_{n+1}(v_{n+1} - v_n) = u_{n+1}v_{n+1} - u_nv_n,$$

ainsi, en sommant sur $n \in \llbracket M, N-1 \rrbracket$, on obtient par télescopage la [Formule de sommation par parties](#) (ou *Transformation d'Abel*) :

$$(SPP) \quad \sum_{n=M}^{N-1} (u_{n+1} - u_n)v_n + \sum_{n=M}^{N-1} u_{n+1}(v_{n+1} - v_n) = u_N v_N - u_M v_M .$$

On peut ainsi adapter la stratégie (1.2.11) afin d'établir plusieurs critères de convergence. Considérons deux suites $(\varepsilon_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que

$$\varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq m \geq 0, \quad \left| \sum_{k=m}^n b_k \right| \leq C ,$$

en particulier $C = 1$ si $b_n = (-1)^n$. Alors la série $\sum \varepsilon_n b_n$ converge dans les cas suivants :

— ([Critère d'Abel](#)) Si $\sum |\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n| < \infty$, de plus

$$\forall n \geq 0, \quad \left| \sum_{k \geq n} \varepsilon_k b_k \right| \leq C \sum_{k \geq n} |\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k| .$$

— ([Test de Dirichlet](#)) Si $(\varepsilon_n)_n$ est décroissante, de plus

$$\forall n \geq 0, \quad \left| \sum_{k \geq n} \varepsilon_k b_k \right| \leq C \varepsilon_n .$$

— ([Séries alternée](#)) Cas particulier du test de Dirichlet où $b_n = (-1)^n$ et donc $C = 1$.

Exemple 1.27. La série $\sum (-1)^n n^{-p}$ converge pour tout $p > 0$.

Cela conclut cette section de rappels sur les séries numériques.

1.2.2 Modes de convergence

Définition 1.28. Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions $u_n : I \rightarrow \mathbb{C}$ pour un intervalle $I \subset \mathbb{R}$,

et $U_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x)$ la somme partielle. On définit les modes de convergence suivants :

1. On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ **converge simplement sur I** si la suite de fonctions $(U_n)_n$ converge simplement sur I , c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x) = U(x) ,$$

pour une certaine fonction $U : I \rightarrow \mathbb{C}$.

2. On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ **converge uniformément sur I** si la suite de fonctions $(U_n)_n$ converge uniformément sur I , c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n u_k - U \right\|_{\infty} = 0 ,$$

pour une certaine fonction $U : I \rightarrow \mathbb{C}$.

Le prochain mode de convergence est spécifique aux séries de fonctions et est l'analogue de la convergence absolue, mais uniformément en $x \in I$:

3. On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ **converge normalement sur I** si la suite numérique $\sum \|u_n\|_{\infty}$ converge.

Comparaison des différents modes de convergence La différence entre convergence simple ou uniforme n'est pas particulièrement plus profond que dans le cas des suites de fonctions, mais on peut néanmoins comparer leur formulation quantifiées en termes de critère de Cauchy :

1. La série $\sum u_n$ converge simplement lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in I, \exists N_{x,\varepsilon} \geq 0 : \left(\forall M \geq N \geq N_{x,\varepsilon}, \left| \sum_{n=N}^M u_n(x) \right| \leq \varepsilon \right) .$$

Ici, le rang $N_{x,\varepsilon}$ dépend de x et ε .

2. La série $\sum u_n$ converge uniformément lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon} \geq 0 : \left(\forall M \geq N \geq N_{\varepsilon}, \left\| \sum_{n=N}^M u_n \right\|_{\infty} \leq \varepsilon \right) .$$

Ici, le rang N_{ε} dépend seulement de ε .

3. La série $\sum u_n$ converge normalement lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon} \geq 0 : \left(\forall M \geq N \geq N_{\varepsilon}, \sum_{n=N}^M \|u_n\|_{\infty} \leq \varepsilon \right) .$$

Ici, le rang dépend seulement de ε et la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ est à l'intérieur de la somme.

On sait déjà que la convergence uniforme implique la convergence simple d'après la section sur les suites de fonctions, la nouveauté ici est que la convergence normale implique la convergence uniforme puisque si $\sum u_n$ converge normalement, alors par l'inégalité triangulaire

$$\left\| \sum_{n=0}^N u_n - \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right\|_{\infty} = \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n \right\|_{\infty} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|u_n\|_{\infty} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 .$$

On a donc en conclusion

cvg. normale $\Rightarrow$ cvg. uniforme $\Rightarrow$ cvg. simple.

En pratique, pour montrer la convergence normale on utilisera les mêmes techniques que pour la convergence absolue de séries numériques appliquée à la série numérique $\sum v_n$ avec $v_n = \|u_n\|_\infty$. Et comme pour les séries numériques, lorsque ce n'est pas possible, on pourra effectuer une sommation par partie pour tout $x \in I$ afin d'utiliser un des critères adaptés (Critère d'Abel, Test de Dirichlet, Séries alternées) uniformément en $x \in I$. Voici deux résultats clé en main pour de telles situations :

Théorème 1.29 (Critère d'Abel uniforme). *Soient $(\varepsilon_n)_n, (b_n)_n$ deux suites de fonctions sur I telles que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n\|_\infty < \infty, \quad \varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u} 0, \quad \text{et} \quad \forall n \geq m \geq 0, \quad \left\| \sum_{k=m}^n b_k \right\|_\infty \leq C,$$

alors la série $\sum \varepsilon_n b_n$ converge uniformément et on a

$$\forall n \geq 0, \quad \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k b_k \right\|_\infty \leq C \sum_{k=n}^{\infty} \|\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k\|_\infty.$$

N.B. : Si $\|\sum_{k=0}^n b_k\|_\infty \leq M$ pour tout $n \geq 0$, on peut prendre $C = 2M$.

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $M \geq 0$ la série $\sum_{n=M}^{\infty} \varepsilon_n b_n$ converge uniformément ainsi que l'estimation

$$\left\| \sum_{n=M}^{\infty} \varepsilon_n b_n \right\|_\infty \leq C \sum_{n=M}^{\infty} \|\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n\|_\infty.$$

Soit $M \geq 0$, on pose pour tout $n \geq M$

$$B_n := \sum_{k=M}^{n-1} b_k \quad \text{où} \quad B_M = 0 \quad \text{et} \quad \|B_n\|_\infty \leq C$$

afin d'appliquer la transformation d'Abel avec $u_n = b_n = B_{n+1} - B_n$ et $v_n = \varepsilon_n$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=M}^{N-1} b_n \varepsilon_n &= \varepsilon_N B_N - \varepsilon_M B_M - \sum_{n=M}^{N-1} B_{n+1} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n) \\ &= \varepsilon_N B_N - \sum_{n=M}^{N-1} B_{n+1} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n). \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

La somme dans la dernière ligne converge normalement lorsque $N \rightarrow \infty$:

$$\sum_{n=M}^{N-1} \|B_{n+1} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n)\|_\infty \leq C \sum_{n=0}^{\infty} \|\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n\|_\infty < \infty,$$

ainsi la somme dans (1.2.12) converge uniformément lorsque $N \rightarrow \infty$, on déduit

$$\left\| \sum_{n=M}^{\infty} b_n \varepsilon_n \right\|_{\infty} \leq C \sum_{n=M}^{\infty} \|\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n\|_{\infty} ,$$

où le terme $\varepsilon_N B_N$ a disparu puisque $\varepsilon_N \xrightarrow{u} 0$ et B_N est borné. $\square$

Corollaire 1.30 (Test de Dirichlet uniforme). *Soient $(\varepsilon_n)_n, (b_n)_n$ deux suites de fonctions sur I telles que*

$$\forall n \geq 0, \varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u} 0, \quad \text{et} \quad \forall n \geq m \geq 0, \quad \left\| \sum_{k=m}^n b_k \right\|_{\infty} \leq C ,$$

alors la série $\sum \varepsilon_n b_n$ converge uniformément et on a

$$\forall n \geq 0, \quad \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k b_k \right\|_{\infty} \leq C \|\varepsilon_n\|_{\infty} .$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que puisque $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n$, on a par télescopage

$$\sum_{k=n}^{\infty} \|\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k\|_{\infty} = \left\| \sum_{k=n}^{\infty} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) \right\|_{\infty} = \|\varepsilon_n\|_{\infty} .$$

$\square$

1.2.3 Transcription des résultats sur les suites de fonctions

Les résultats de la section sur les suites de fonctions s'appliquent immédiatement aux séries de fonctions. Énonçons les tout de même.

Corollaire 1.31 ($\mathcal{C}^0 + \text{cvg. unif.} \Rightarrow \text{lim. } \mathcal{C}^0$). *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions **continues** sur I . Si la série $\sum u_n$ converge **uniformément** vers U sur I , alors U est **continue** sur I .*

Corollaire 1.32 ($\mathcal{C}^0 + \text{cvg. unif.} \Rightarrow \text{lim. integ.}$). *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions **continues** sur $I = [a, b]$. Si la série $\sum u_n$ converge **uniformément** sur I , alors*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx ,$$

en particulier, la série numérique de droite converge.

Corollaire 1.33. *Soit un entier $r \geq 1$, et $(u_n)_n$ une suite de fonctions $\mathcal{C}^r(I; \mathbb{C})$ avec $I = [a, b]$ tels que pour certains $x_0, x_1, \dots, x_{r-1}$ et une certaine fonction $V : I \rightarrow \mathbb{C}$*

$$\sum_{n=0}^N u_n^{(r)} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{u} V \quad \text{et} \quad \forall s \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket, \quad \sum u_n^{(s)}(x_s) \text{ converge simplement},$$

alors il existe $U \in \mathcal{C}^r(I; \mathbb{C})$ tel que

$$\forall s \in \llbracket 0, r \rrbracket, \quad \sum_{n=0}^N u_n^{(s)} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{u} U^{(s)} \quad \text{et} \quad U^{(r)} = V.$$