TD1 — Suites et séries de fonctions

Légende : $\diamondsuit$ basique, $\bigstar$ difficile, $\bigstar\bigstar$ plus difficile.

Exercice 1.1. $\diamondsuit$ Soit $\varphi, \psi : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions bornées, montrer les propriétés suivantes :

1. (Inégalité triangulaire) $\|\varphi + \psi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty + \|\psi\|_\infty$.
2. (Homogénéité) $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|\varphi\|_\infty$
3. (Séparation) $\|\varphi\|_\infty = 0 \Rightarrow \varphi = 0$.

On dit que $\| \cdot \|_\infty$ est une *norme* sur l'ensemble des fonctions bornées.

Exercice 1.2. $\diamondsuit$ Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ suivantes : 1) $f_n(x) = x^n$; 2) $f_n(x) = x^n(1 - x)$; 3) $f_n(x) = nx^n(1 - x)$.

Exercice 1.3. $\diamondsuit$ Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes : 1) $f_n(x) = x\left(1 - \frac{1}{n}\right)$; 2) $f_n(x) = x - \frac{\sin(x)}{nx}$; 3) $f_n(x) = e^{-n|x|}\cos(nx)$; 4) $f_n(x) = \frac{x}{x^2+n}$.

Exercice 1.4. $\diamondsuit$ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la suite de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$, pour $n \geqslant 1$.

1) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
2) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha < 1$.
3) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout segment de $]0, +\infty[$.

Exercice 1.5. *Sur l'hypothèse de convergence uniforme de la dérivée.* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ par

$$f_n(t) = \begin{cases} |t| & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant |t| \leqslant 1 \\ \frac{n}{2}t^2 + \frac{1}{2n} & \text{si } |t| < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

1) Représenter graphiquement f_n.
2) Montrer que $f_n \in C^1([-1, 1] ; \mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et représenter graphiquement f'_n.
3) Montrer que $f_n \to f$ et $f'_n \to g$ simplement, pour des fonctions f et g qu'on déterminera.
4) La fonction f est-elle C^1 ?
5) A-t-on convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? Et de $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Exercice 1.6. *Sur l'hypothèse de convergence uniforme sous l'intégrale.* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n \in C^0([0, 1] ; \mathbb{R})$ par

$$f_n(t) = \begin{cases} 2n^2 t & \text{si } 0 \leqslant t < \frac{1}{2n} \\ 2n - 2n^2 t & \text{si } \frac{1}{2n} \leqslant t < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

1) Représenter graphiquement f_n.
2) Montrer que $f_n \to f$ simplement, pour une fonction $f \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ que l'on déterminera.
3) A-t-on $\int_0^1 f_n(t)\,dt \to \int_0^1 f(t)\,dt$?
4) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément ?

Exercice 1.7. Sur l'intervalle $[-1, 1]$, on définit les fonctions $f_0(t) = 2t$ puis, par récurrence, $f_{n+1}(t) = \sqrt{2 + f_n(t)}$.

1) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $t \in [-1, 1]$, on a $0 \leqslant f_n(t) \leqslant 2$.
2) Montrer que, pour tout $t \in [-1, 1]$, la suite $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction constante égale à 2.
4) Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$ et pour tout $t \in [-1, 1]$, on a

$$2 - f_{n+1}(t) \leqslant \frac{1}{2}(2 - f_n(t)).$$

5) En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.

6) En déduire que les suites suivantes convergent :

$$I_n = \int_{-1}^{1} f_n(t)\,dt, \quad J_n = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{f_n(t)}, \quad K_n = \int_{-1}^{1} \frac{f_{n-1}(t)}{f_n(t)}\,dt.$$

Exercice 1.8. ★ Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$g_n(x) = n\Big(f\Big(x + \frac{1}{n}\Big) - f(x)\Big).$$

1) Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction g à déterminer.
2) Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$.
Indication : Utiliser le théorème de Heine et la formule de Taylor.

Exercice 1.9. ★ Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\exists M > 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x+y) - f(x) - f(y)| \leqslant M.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit $u_n(x) = 2^{-n} f(2^n x)$.
1) Donner des exemples de telles fonctions f.
2) Étudier la convergence (simple ou uniforme) de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Indication : Un bon réflexe à avoir en présence du terme $2^{\pm n}$ est de penser à la série géométrique $\sum 2^{-n}$ et à l'identité $2^{n+1} = 2^n + 2^n$.
3) Montrer que la limite u de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est linéaire.

Exercice 1.10. ★★ *Théorème de Dini.* Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions continues sur $[0,1]$ convergeant simplement vers une fonction continue f.
1) Justifier que, si pour tout $n \geq 0$ et $\epsilon > 0$ l'ensemble

$$\{x \in [0,1] \ : \ |f(x) - f_n(x)| \geq \epsilon\}$$

est vide, alors f_n converge uniformément vers f.
2) En utilisant la compacité de $[0,1]$ en déduire par l'absurde que f_n converge uniformément vers f.

Application — Montrer la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions polynomiales définies par $P_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}(x) = P_n(x) + (x - P_n(x)^2)/2$.

Exercice 1.11. Soit f et g deux fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b x^n f(x)dx = \int_a^b x^n g(x)dx$. Montrer que $f = g$.
Indication : Remarquer qu'une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^0([a,b])$ est nulle si et seulement si $\int_a^b \varphi(x)^2 dx = 0$.

Exercice 1.12. ★ Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales. Montrer que, si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors sa limite est une fonction polynomiale.
Indication : Remarquer qu'une fonction polynomiale est bornée si et seulement si elle est constante.

Exercice 1.13. *Fonctions équicontinues.* On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est équicontinue si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall (x,y) \in [0,1] \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

1) Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue et converge simplement, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.
2) Soit $L > 0$. Montrer que, si toutes les fonctions f_n sont L-lipschitziennes, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue.
3) Montrer que $(x \mapsto \arctan(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas équicontinue.

Exercice 1.14. ★★ *Fonctions réglées.* On appelle fonction réglée sur $[a,b]$ toute limite uniforme de fonctions en escalier sur $[a,b]$. Montrer qu'une fonction sur $[a,b]$ est réglée si et seulement si elle admet en tout point de $]a,b[$ une limite à droite et une limite à gauche, ainsi qu'une limite à droite (resp. à gauche) en a (resp. en b).

Exercice 1.15. ♢ Pour tout $n \geqslant 1$, soit $u_n\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ donnée par $u_n(x) = xe^{-nx}$.
1) Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.
2) Pour tout $n \geqslant 1$, donner le tableau de variations de u_n.

3) Pour tout $n \geqslant 1$, déterminer $\sup\{|u_n(x)| \ ; \ x \in [1, +\infty[\}$. En déduire que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$.
4) Pour tout $a > 0$, montrer que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.
5) Est-ce que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$? Et sur $\mathbb{R}_+^*$?
6) Soit $N \geqslant 1$. Calculer $\sum_{n=N}^{\infty} u_n(x)$.
7) Est-ce que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 1.16. $\diamondsuit$ Étudier la convergence (simple, uniforme ou normale) des séries de fonctions suivantes : 1) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}$; 2) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$ sur $\mathbb{R}$; 3) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x}{n^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}_+$; 4) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n+x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 1.17. $\diamondsuit$ On considère la série de fonctions, définies sur $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}.$$

1) Montrer que la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge si et seulement si $x \in [-1, 1[$. On note $S(x)$ sa somme.
2) Montrer que la fonction S est de classe C^1 sur $]-1, 1[$ et que

$$\forall x \in]-1, 1[\quad S'(x) = \frac{1}{1-x}.$$

3) En déduire que

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

4) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{y^n}{n}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
5) En déduire que la fonction S est continue sur $[-1, 1[$, et que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2).$$

Exercice 1.18. Dans chacun des cas suivants, montrer que la série de fonctions converge simplement sur I et déterminer la classe de régularité (C^0, C^1, ..., C^∞) de sa somme sur I : 1) $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{n}{n^2+x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$; 2) $\sum_{n\geqslant 0} e^{-x\sqrt{n}}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$; 3) $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}_+$.

Exercice 1.19. $\diamondsuit$ Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n\geqslant 0} |a_n|$ converge. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $u_n(t) = a_n \cos(nt)$.
1) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement. On note U sa somme.
2) Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^{2\pi} \cos(n_0 t) U(t) dt$.

Exercice 1.20. On considère la série de fonctions, définies sur $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin(nx)}{n+1}.$$

1) Montrer que cette série converge simplement sur $\mathbb{R}$.
Indication : Utiliser la formule d'Euler.
2) Montrer que cette série ne converge pas normalement sur $\left[10^{-7}, \pi\right]$.
3) Montrer que cette série converge uniformément sur $\left[10^{-7}, \pi\right]$.
4) Y a-t-il convergence uniforme sur $[0, \pi]$?

Exercice 1.21. ★★ *Séries de Dirichlet.*
1) Donner l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{n\geqslant 0} e^{-nz}$ converge.
2) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Montrer que, si $\sum_{n\geqslant 0} a_n e^{-nz}$ converge pour $z = z_0$, alors cette série converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mathfrak{Re}(z) > \mathfrak{Re}(z_0)$.
3) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels positifs. Montrer que, si $\sum_{n\geqslant 0} a_n e^{-\lambda_n z}$ converge pour $z = z_0$, alors, pour tout $\alpha \in]0, \pi/2[$, cette série converge uniformément sur le secteur angulaire

$$S_{z_0,\alpha} = \left\{ z_0 + re^{i\theta} \ ; \ r \geqslant 0, \ -\alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha \right\} .$$