TD2 — Séries entières

Légende : ♢ basique, ★ difficile, ★★ plus difficile.

Exercice 2.1. ♢ Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer le rayon de convergence de : 1) $\sum_{n\geqslant 0} a_n^2 x^n$; 2) $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^{2n}$.

Exercice 2.2. ♢ Dans chacun des cas suivants, déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ et étudier la convergence pour $|x| = R$: 1) $a_n = n2^{-n}$; 2) $a_n = \frac{n!}{n^5+1}$; 3) $a_n = \sin(n\pi/2)$; 4) $a_n = (\sqrt{n})^{1/n}$; 5) $a_n = e^{n^{1/3}}$; 6) a_n est le n^{e} chiffre du développement décimal de π ; 7) $a_n = n^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; 8) $a_n = \rho^{\sqrt{n}} \mathbb{1}_{n\in C}$, où $\rho > 0$ et C est l'ensemble des carrés.

Exercice 2.3. On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \sin(n^{-1/2}) x^n$.

1) Donner son rayon de convergence R. On notera f sa somme sur l'intervalle $]-R, R[$.
2) Étudier la convergence de la série entière pour $x = R$ et pour $x = -R$.
3) Déterminer $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.
4) Montrer que $\sum_{n\geqslant 2} (\sin(n^{-1/2}) - \sin((n-1)^{-1/2})) x^n$ converge normalement sur $[0, 1]$.
5) Montrer que $(1 - x) f(x) \to 0$ quand $x \to 1^-$.

Exercice 2.4. ★ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Soit $c \in \mathbb{C}$. On suppose que le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est infini et que $b_n/a_n \to c$.

1) Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$ a un rayon de convergence infini.
2) Montrer que

$$\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n} \xrightarrow[x\to+\infty]{} c.$$

Exercice 2.5. ♢ *Calculs de sommes.* Déterminer le rayon de convergence R des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ suivantes, puis calculer leurs sommes sur $]-R, R[$: 1) $a_n = n$; 2) $a_n = n(n-1)$; 3) $a_n = n^2$; 4) $a_n = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 2.6. Soit f la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^2+1} x^n$.

1) Montrer que f est définie sur $[-1, 1]$.
2) Montrer que f est croissante et de classe C^1 sur $[-1, 1[$.
3) Déterminer une équation différentielle linéaire du second ordre dont f est solution sur $]-1, 1[$.

Exercice 2.7.

1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^k}{n!} x^n$.
2) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un polynôme P_k de degré k tel que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} x^n = P_k(x) e^x.$$

3) Déterminer une relation entre P_k et P_{k+1}.

Exercice 2.8. *Théorème d'Abel.* Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ soit convergente.

1) Montrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$. On note S sa somme.
2) Calculer $\lim_{x\to 1^-} S(x)$.

Exercice 2.9. ★★ *Théorème de Tauber.* Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge sur $[0, 1[$ et on note S sa somme. On suppose enfin que $S(x) \to \ell \in \mathbb{R}$ quand $x \to 1^-$.

1) Donner un exemple vérifiant les hypothèses précédentes avec $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ divergente.
2) Montrer que, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, alors $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge vers ℓ.

On suppose désormais que $a_n = o(1/n)$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$, on introduit

$$B_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(1-x^n)a_n \quad \text{et} \quad R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n.$$

3) Vérifier que, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$,

$$\sum_{n=0}^{N} a_n - \ell = S(x) - \ell + B_N(x) - R_N(x).$$

4) Montrer que, pour tout $x \in [0,1[$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall N \geqslant N_0 \quad |R_N(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{N(1-x)}.$$

5) Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge vers ℓ.

Exercice 2.10. *Formule de Cauchy.* Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note f la somme de cette série sur son disque de convergence $\{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| < R\}$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, calculer $\int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta$.
2) Soit $r \in [0, R[$. Montrer que la série de fonctions (de θ) $\sum_{p\geqslant 0} a_p r^p e^{i(p-n)\theta}$ est normalement convergente sur $[0, 2\pi]$.
3) Montrer que

$$\forall r \in [0, R[\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad 2\pi r^n a_n = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta} d\theta.$$

4) On suppose que $R = +\infty$ et que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante.

Exercice 2.11. *Zéros isolés.* Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note f sa somme. Supposons qu'il existe une suite $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $z_p \neq 0$, $f(z_p) = 0$, et $z_p \to 0$. Montrer que f est nulle.

Exercice 2.12. $\diamondsuit$ *Développements en série entière usuels.* Montrer que : 1) pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$, $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$; 2) pour tout $x \in]-1,1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$; 3) pour tout $x \in]-1,1[$, $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; 4) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$; 5) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Exercice 2.13. $\diamondsuit$ *Développements en série entière.* Dans chacun des cas suivants, développer en série entière en 0 la fonction f et préciser le rayon de convergence de sa série de Taylor ainsi que le plus grand intervalle contenant 0 sur lequel f coïncide avec la somme de cette série : 1) $f(x) = \ln(1-2x)$; 2) $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$; 3) $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$; 4) $f(x) = (x+4)^\alpha$; 5) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6})$. 6) $f(x) = \arctan(x)$.

Exercice 2.14. On considère la fonction définie par $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}$ pour $x \in]-\infty, 1[\setminus \{0\}$ et prolongée par continuité en 0.

1) Développer f en série entière en 0.
2) Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$.
3) En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$.

Exercice 2.15. Développer en série entière en 0 la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$, en utilisant la relation $(1-x-x^2)f(x) = x$.

Exercice 2.16. ★ *Inverse.* Soit f une fonction développable en série entière en 0 avec $f(0) \neq 0$. Montrer que $1/f$ est développable en série entière en 0.

Exercice 2.17. *Résolution d'équations différentielles.* On veut trouver une solution de l'équation différentielle suivante :

$$3xy'(x) + (2-5x)y(x) = x. \tag{1}$$

Soit y une fonction développable en série entière en 0 s'écrivant $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ au voisinage de 0.

1) Montrer que, si y est une solution de l'équation (1), alors la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie une relation linéaire d'ordre 1 que l'on précisera.
2) Réciproquement, montrer que la fonction y trouvée ci-dessus est bien solution de (1) sur $\mathbb{R}$.
3) Même exercice avec l'équation différentielle $xy''(x) + 2y'(x) + xy(x) = 0$ (on cherchera cette fois une relation linéaire d'ordre 2 entre les coefficients).

Exercice 2.18. ★★ *Fonctions absolument monotones.* Soit $f\colon [0,a[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geqslant 0$.

1) Montrer que f coïncide avec la somme de sa série de Taylor en 0.
2) Application — Montrer que $\tan|_{]-\pi/2,\pi/2[}$ coïncide avec la somme de sa série de Taylor en 0.

Exercice 2.19. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}.$$

1) En supposant que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, montrer que, pour tout $x \in]-R, R[$, $xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$.
2) En déduire que

$$\forall x \in]-R, R[\setminus \{0\} \quad f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

3) Donner une expression explicite de u_n en fonction de n.

Exercice 2.20. ★ *Nombres de Bell.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note b_n le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$. On convient que $b_0 = 1$.

1) Calculer b_1, b_2 et b_3.
2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}.$$

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \leqslant n!$.
4) Montrer que le rayon de convergence R de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{b_n}{n!} x^n$ est non nul.
5) Montrer que la somme S de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{b_n}{n!} x^n$ vérifie : pour tout $x \in]-R, R[$, $S'(x) = e^x S(x)$.
6) Calculer S (on admettra l'unicité de la solution de l'équation différentielle précédente vérifiant $S(0) = b_0$).

Exercice 2.21. ♢ Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que A est diagonalisable, avec pour valeurs propres i et $-i$.
2) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.22. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

1) Montrer que f est bien définie.
2) Donner une équation différentielle du troisième ordre vérifiée par f.
3) Résoudre cette équation différentielle et en déduire f.

On propose une autre méthode pour calculer f.

4) En notant $j = e^{i2\pi/3}$, calculer $1 + j^k + j^{2k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
5) Développer en série entière en 0 la fonction $x \mapsto e^x + e^{jx} + e^{j^2 x}$.
6) En déduire f.