TD1 — Séries de Fourier

Légende : $\diamondsuit$ basique, $\bigstar$ difficile, $\bigstar\bigstar$ plus difficile.

Autour du cours

Exercice 1.1. $\diamondsuit$ Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux.
1) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $2\pi n \leqslant a < 2\pi(n+1)$.
2) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$,
$$\int_a^{a+2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)dt.$$

Exercice 1.2. $\diamondsuit$ Soit $N \in \mathbb{N}$, $(c_n)_{-N\leqslant n\leqslant N} \in \mathbb{C}^{2N+1}$ et P le polynôme trigonométrique défini par
$$P(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}.$$
Calculer les coefficients de Fourier de P.

Exercice 1.3. $\diamondsuit$ Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux. On note $a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt.$$
1) Montrer que si f est paire alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$.
2) Montrer que si f est impaire alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$.

Exercice 1.4. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note
$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt.$$
1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$. On rappelle que $\overline{\int g(t)dt} = \int \overline{g(t)}dt$.
2) Soit $g\colon t \mapsto f(-t)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(g) = c_{-n}(f)$.
3) Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $h_a\colon t \mapsto f(t-a)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(h_a) = e^{-ina}c_n(f)$.
4) $\star$ Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ 2π-périodiques et continues. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $\tau_a\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ l'application linéaire définie par $\tau_a(f)\colon t \mapsto f(t-a)$. Déterminer les valeurs propres de τ_a. Préciser l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles les sous-espaces propres sont des droites.

Exercice 1.5. *Théorème de Fejér.* Pour tout $N \geqslant 1$, on note F_N le noyau de Fejér à l'ordre N. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et continue. Pour tout $N \geqslant 1$, on définit la fonction $f * F_N\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par
$$f * F_N(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)F_N(s)ds.$$
Montrer que $(f * F_N)_{N\geqslant 1}$ converge uniformément vers f.

Indication : On pourra reprendre la preuve justifiant que si une série de Fourier de f converge en un de ses points de continuité, alors f et sa série de Fourier coïncident en ce point.

Exercice 1.6. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et continue. Montrer que f est de classe C^∞ si et seulement si $\widehat{f}(n) = \mathcal{O}\left(n^{-k}\right)$ pour tout $k \geqslant 1$.

Exercice 1.7. ★ *Une transformation unitaire.* Soit f et $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions 2π-périodiques et continues par morceaux. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\overline{c_n(g)}$ est convergente et que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\overline{c_n(g)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Indication : On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 1.8. Soit $T > 0$ et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique.
1) Montrer que la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $g(u) = f(\frac{T}{2\pi}u)$ est 2π-périodique.
2) On suppose que f est de classe C^1. Montrer qu'il existe une famille de nombres complexes $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{i\frac{2\pi n}{T}t}.$$

On donnera une expression explicite des α_n en fonction de f.

Applications

Exercice 1.9. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(t) = t^2$ pour $t \in \,]-\pi, \pi]$.
1) Dessiner le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2) Justifier que f est continue et de classe C^1 par morceaux.
3) Calculer les coefficients de Fourier de f.
4) En déduire les égalités suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

5) Montrer que, pour tout $t \in [0, 2\pi]$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nt)}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}t + \frac{1}{4}t^2.$$

Exercice 1.10. Montrer que, pour tout $t \in [0, \pi]$,

$$t(\pi - t) = \frac{\pi^2}{6} - \Big(\frac{\cos(2t)}{1} + \frac{\cos(4t)}{4} + \frac{\cos(6t)}{9} + \cdots\Big) = \frac{8}{\pi}\Big(\frac{\sin(t)}{1} + \frac{\sin(3t)}{27} + \frac{\sin(5t)}{125} + \cdots\Big).$$

Exercice 1.11. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(t) = |t|$ pour $t \in \,]-\pi, \pi]$.
1) Dessiner le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2) Justifier que f est continue et de classe C^1 par morceaux.
3) Calculer les coefficients de Fourier de f.
4) En déduire les valeurs des sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Exercice 1.12. *Inégalité de Wirtinger.* Soit $f\colon\ [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(0) = f(2\pi)$ et $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$.
1) Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\, dt.$$

2) Déterminer les cas d'égalité.

Exercice 1.13. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-periodique et continue. On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$u'' - u = f \tag{E}$$

d'inconnue la fonction 2π-périodique $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

1) Un cas particulier : si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, déterminer toutes les solutions 2π-périodiques de l'équation (E).

2) On suppose dans cette question que u est une fonction 2π-périodique de classe C^2, solution de l'équation différentielle (E). Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(f) = -(1 + n^2)c_n(u).$$

En déduire une formule exprimant u en fonction des coefficients de Fourier de f.

3) Pour étudier la réciproque, on suppose de plus que la série de Fourier de f converge normalement. Montrer que la fonction $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad u(t) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n(f)}{1+n^2} e^{int}$$

est bien une fonction 2π-périodique de classe C^2 solution de l'équation (E).

4) Déterminer une fonction $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique et continue telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)G(t-s)ds.$$

Exercice 1.14. ★ *Équirépartition.* Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique continue et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Q}$. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(t + k\alpha) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)ds.$$

Indication : Commencer par supposer f continument dérivable afin de pouvoir développer f en série de Fourier convergeant normalement, puis conclure par densité.

Exercice 1.15. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et f la fonction 2π-périodique définie par $f(t) = e^{i\alpha t}$ pour $t \in \,]-\pi, \pi]$.

1) Calculer les coefficients de Fourier de f.

2) En déduire les égalité suivantes :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha+n)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}\right)^2 \quad \text{et} \quad \pi\,\mathrm{cotan}(\alpha\pi) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{\alpha - n} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}.$$

3) Montrer que

$$\pi = 4 - 8\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{16n^2 - 1}.$$

Exercice 1.16. ★ *Phénomène de Gibbs.* Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(t) = t$ pour $t \in \,]-\pi, \pi]$.

1) Dessiner le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.

2) Justifier que f est de classe C^1 par morceaux.

3) Calculer les coefficients de Fourier de f.

4) En déduire les valeurs des sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

5) Montrer que, pour tout $t \in \,]0, 2\pi[$,

$$S_N(t) := \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nt)}{n} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{\pi - t}{2}.$$

6) La fonction *sinus cardinal*, notée sinc, est le prolongement par continuité en 0 de $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \sin(x)/x$. Montrer que la fonction $\theta \colon x \mapsto \int_0^x \operatorname{sinc}(u)du$ atteint en π son maximum sur $\mathbb{R}_+$. *(Remarque : $\theta(\pi) \approx 1{,}85$.)*
7) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $N \geqslant N_0$, la fonction S_N prend toutes les valeurs entre $-\theta(\pi) + \varepsilon$ et $\theta(\pi) - \varepsilon$.

Indication : On pourra remarquer que $S_N(x/N)$ est une somme de Riemann.

Exercice 1.17. ★★ Soit $(b_n)_{n\geqslant 1}$ une suite positive décroissante de limite nulle. On s'intéresse à la série trigonométrique $(S_N)_{N\geqslant 1}$ définie par

$$S_N(t) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nt).$$

1) Dans cette question uniquement on suppose que $(b_n)_{n\geqslant 1} = (n^{-1/2})_{n\geqslant 1}$. Montrer que $(S_N)_{N\geqslant 1}$ n'est pas la série de Fourier d'une fonction continue par morceaux.
2) Montrer que $(S_N)_{N\geqslant 1}$ converge simplement.
3) Montrer que $(S_N)_{N\geqslant 1}$ converge uniformément sur tout segment de $]0, 2\pi[$.

Dans la suite, on va montrer que $(S_N)_{N\geqslant 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $nb_n \to 0$.

4) Montrer que, pour $N \geqslant 1$ et $t = \frac{\pi}{2N}$,

$$\sum_{n=\lceil N/2 \rceil}^{N} b_n \sin(nt) \geqslant \frac{Nb_N}{2\sqrt{2}}.$$

5) En déduire que, si $(S_N)_{N\geqslant 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors $nb_n \to 0$.

Pour tout $t > 0$, on définit $N(t) := \lceil 1/t \rceil$.

6) Montrer que, pour tout $N \geqslant 1$ et $t > 0$,

$$\left| \sum_{n=N+1}^{N(t)} b_n \sin(nt) \right| \leqslant \max \left\{ nb_n \ ; \ n \in [\![N+1, N(t)]\!] \right\}.$$

7) En utilisant une transformation d'Abel, montrer que, pour tout $t \in]0, \pi]$,

$$\left| \sum_{n=N(t)+1}^{+\infty} b_n \sin(nt) \right| \leqslant \pi N(t) b_{N(t)}.$$

8) En déduire que, si $nb_n \to 0$, alors $(S_N)_{N\geqslant 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.